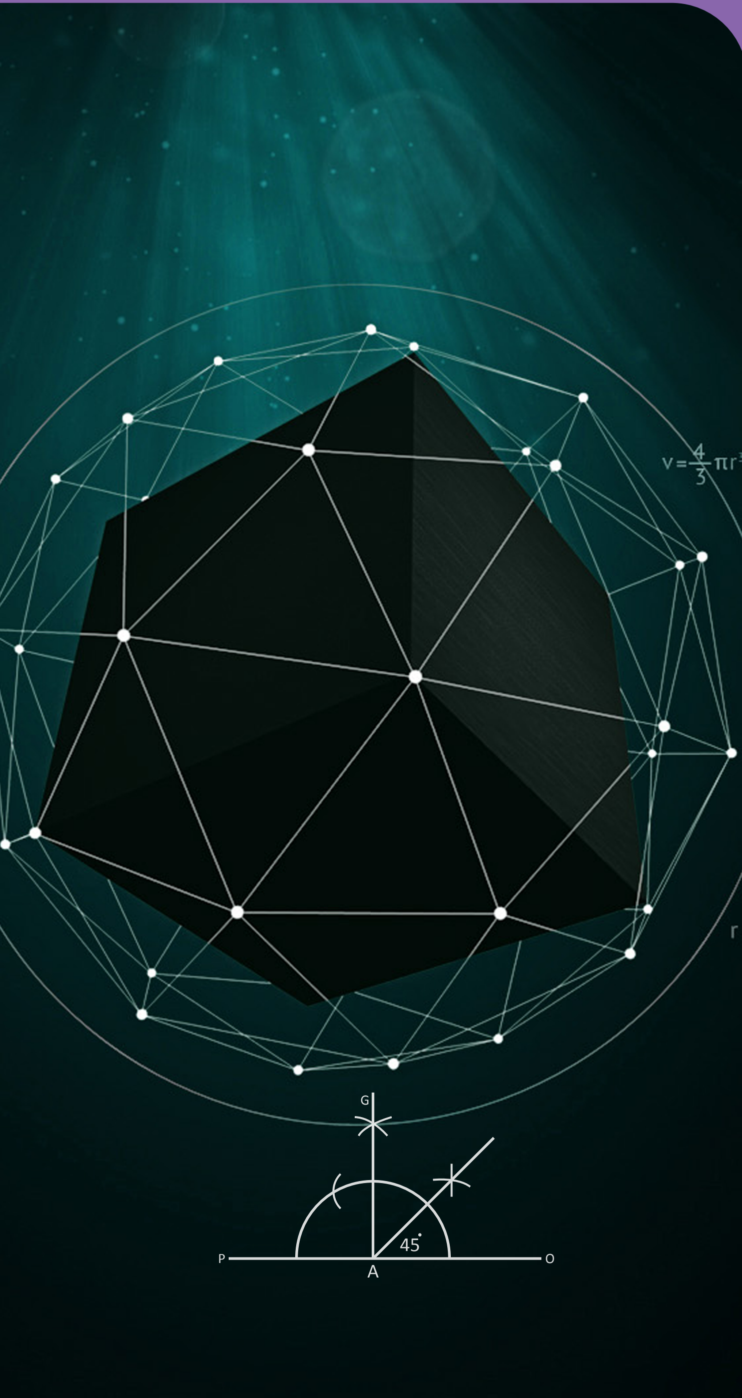


وزارت معارف
ریاست عمومی تربیهٔ معلم
پروگرام تربیهٔ معلمان داخل خدمت

مسوده

انست سوم



مواد آموزشی ریاضی برای معلمان

شامل موضوعات انتخابی صنوف ۱۰ الی ۱۲ نصاب جدید تعلیمی

تهیه کنندگان: پوهاند دکتور سید قیوم شاه باور
پوهاند عبدالحق ایمل
پوهنوال دکتور محمد انور غوری
پوهندوی لعل محمد رحیمی
دکتور امیر محمد منصوری

سال: ۱۳۹۲ هـ ش

Math Resource Book For Teachers

Covering Topics From Grades 10-12

INSET III

Authors: Professor Dr. Said Qayum Shah Bawar
Professor Abdul Haq Emal
Associate Professor Dr. M. Anwar Ghoury
Lecturer Lal Mohammad Rahimi
Dr. Amir Mohammad Mansoori

2013



وزارت معارف

ریاست عمومی تربیهٔ معلم

مواد آموزشی ریاضی برای معلمان

سال: 1392 هـ ش


بسم الله الرحمن الرحيم

پیشگفتار

بسم الله الرحمن الرحیم

تعلیم و تربیه یکی از عوامل اساسی پیشرفت جامعه بوده که باید بنا بر اقتضای وقت، طبق شرایط ملی و بین المللی همان جامعه، انکشاف و رشد نماید. با درنظرداشت این واقعیت لزوم تغییرات اساسی در نظام تعلیم و تربیهٔ کشور ما نیز محسوس میگردد. بناءً تغییرات مطلوب بدون توجه به ارتقاء ظرفیت معلمین امکان پذیر نیست. در شرایط موجود که در نتیجهٔ پیشرفت علوم و تکنالوژی معاصر جهان، در بخشهای گوناگون حیات بشری، تحولات شگرفی رونما گردیده است، نیازمندی های رهایی از عقب مانده گی و سیر در جهت ترقی و پیشرفت، به ضرورت مبرم تاریخی مبدل شده است.

انکشاف و ارتقاء علوم و تکنالوژی آنقدر سریع است که راه صد ساله را یک روزه می پیماید. رفتن موازی به این سرعت همانقدر دانش نیاز دارد و حاصل کردن علم و دانش سعی و تلاش بی حد می طلبد. یکی از علومی که در ساحهٔ رشد تکنالوژی رول عمده داشته، ریاضیات است.

علم ریاضیات در سیر تاریخ جوامع بشری و در حصص مختلف فعالیت های بشری، ساحات اقتصادی، اجتماعی، تجارت، ترانسپورت، صنایع، زراعت، انجینری، طبابت، ستاره شناسی، هواشناسی، تخنیک نظامی، کشتی رانی و تکنالوژی همیشه منحیث یک ضرورت مطرح بوده و از آن استفاده می گردد.

این علم از یک طرف در اثر رابطه ها فی مابین رشته های مختلف ریاضی منحیث یک علم مستقل و از جانب دیگر به موجب ضرورتهای آن در پیشبرد و پیشرفت علوم طبیعی و کاربرد آن در زندگی روزمره و همه بعدهای دیگر پی هم تکامل می نماید.

این پروگرام آموزشی معلمین که بر مبنای نصاب تعلیمی جدید طوری ترتیب گردیده تا معلمین بتوانند شاگردان را با اساسات علوم خوبتر آشنا سازند.

امیدوارم معلمین عزیز کشور ما بتوانند با اسلوب آموزش فعال، و با استفاده از این مواد آموزشی به طور ثمربخش بهره مند گردند. و سویهٔ علمی و مسلکی خویش را به حیث معلمان کشور ارتقا بخشند و آمادهٔ خدمت بیشتر و بهتر به آینده سازان کشور شان شوند.

در پایان جا دارد تا از همکاری آن عده استادان پوهنتون ها، اعضای علمی و مسلکی ریاست عمومی تربیه معلم و کارمندان تخنیکی و طباعتی که در تدوین این مواد آموزشی سهم خویش را ایفا نموده اند، اظهار امتنان و از بارگاه خداوند متعال برای ایشان موفقیت های بیشتر را در تعلیم و تربیه اولاد وطن خواهانیم.

سوسن وردک

رئیس عمومی تربیهٔ معلم

و مشاور ارشد مقام وزارت معارف

فهرست مطالب

عنوان **صفحه**

ریاضی صنف دهم

صنف یازدهم

صنف دوازدهم

تجارب ساینس

مقدمه

هر اقدام جدید در غاز خود توام بایک سلسله مشکلات میباشد که باید به تدریج و موقع اش آن را حل نمود.

طوریکه به همگان معلوم است در سال های اخیر مفرادات کتب درسی مکاتب عمومی مربوط وزارت معارف مطابق به تقاضای وقت و با در نظر داشت مفردات کتب درسی کشورهای همسایه، تجدید گردیده و کتب درسی آن نوشته شده است.

درین زمینه مفردات درسی کتب ریاضیات نیز تجدید و کتاب های مربوطه آن تهیه گردیده و در معرفی تدریس قرار گرفته اند مگر معلمان مکاتب به دو مشکل در ان موجه میباشد.

از یک طرف مفردات بعضی موضوعات برای شان نا اشنا بوده و از جانب دیگر سلسله موضوعات این کتب به تصحیح، تکمیل و توضیح ضرورت دارند. ازانرو ریاست عمومی تربیه معلم تصمیم گرفت که تحت پروگرام انست 4 با معلمان مکاتب همکاری نموده و ان را اموزش دهند. در زمینه با همکاری استادان پوهنتون کابل و اعضای علمی خود آن ریاست به تهیه مواد پرداختند. که با تفکیک موضوعات مباحثه را اماده نموده که در ان موضوعات نادرست، تصحیح گردیده، موضوعات ناتکمیل تکمیل شده سلسله و موضوعات آن توضیح گردیده اند. تا ترینر ها و معلمان محترم از آن استفاده و به شاگردان انتقال دهند.

این مباحث مربوط صنوف دهم، یازدهم و دوازدهم مکاتب اند که دران افاده های الجبری، پولینوم های یک متحوله و چندین متحوله، فکتور ساختن پولینوم ها حاصل ضرب کارتزین دوست، رابطه دوگانه در ست ها، رابطه معادلت، توابع در ست ها و انواع آن، توابع معکوس پذیر، بعضی مفاهیم منطق ریاضیات مباحث هندسه تحلیلی، بعضی مفاهیم مثلثات دسطح، معادلات مثلثاتی، لوگارتم، توابع لوگارتمی و اکسپونینشیل، معادلات لوگارتمی و اکسپونینشیل، مباحثه احصایه، مترکس ها، دیترمینانت ها، حل سیستم های معادلات خطی به طرق مختلف، لیمت، متمادیت، مشتقات و انتگرال ها در توابع مختلف با رابطه بین احصایه و احتمالات در نظر گرفته شده اند

علاوع بران در اغاز همین مجموعه سلسله موضوعات مربوط به احصایه و موضوعات تاریخی و وجه تسمیه در ریاضیات حل مسایل و موضوعات مفید دیگر که جنبه پیداگویک دارد جای داده شده است. به امیدانکه استادان و شاگردان از ان استفاده بیشتر برند.

مسایل ریاضی عمومی

(حساب، الجبر، هندسه و انالیز...)

تسمیه، تاریخ محتوا و اهداف

نوشته داکتر منصوری

مقدمه

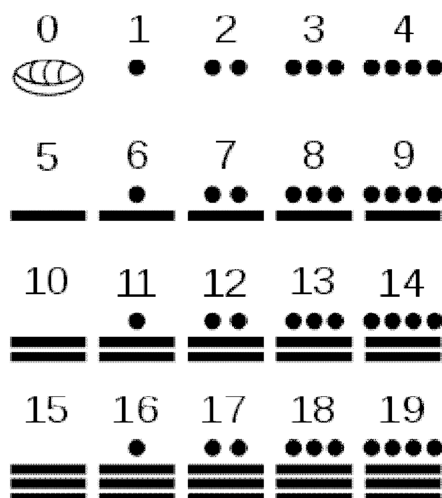
تاریخ ریاضی، عبارت از معلومات راجع به منشأ اکتشافات علم ریاضی و طرق ریاضیکی اوقات گذشته است. دانش راجع به تاریخ مبادی مضمون و معلومات جالب راجع به ان برای هر کس، خاصتاً معلمان، معلومات مسلکی ان ها را افزایش می دهد، هدف این نوشته، نیز همین است. در نظام تعلیمی ما اصطلاحات حساب، ریاضی و الجبر وجود دارند که بعضاً با هم توام استعمال می شوند. دریافت معلومات دقیق در مورد محتوای این، اصطلاحات برای معلمین کمک می کند که راجع به مضامین وسعت نظری بهتر پیدا کنند و تدریس ان ها بهبود یابد تدریس مروج ریاضی و شکل مجرد ان مسئلۀ دیگری است که به توجۀ عاجل نیازمند است. امید است این نوشته از بعضی جهات، مخصوصاً از نگاه حل مسایل و بعضی پیشنهادات ارایه شده، کمک کننده باشد.

مفاهیم تاریخ و تسمیه

حساب معادل کلمۀ انگلیسی (Arithmatic) است که عبارت از اولین و ساده ترین بخش ریاضیات (Mathematics) می باشد. حساب کلمه عربی است که معنی ان شمارش می باشد. کلمۀ معادل حساب (Atithmatic) اصلاً کلمه یونانی است که معنی ان «اعداد» میباشد. بصورت عموم حساب با کمیت ها و مخصوصاً با عملیه های ترکیب اعداد سرو کار دارد. موضوع علم حساب عبارت از عملیه های اعداد تام و کسری یعنی (جمع، تفریق، ضرب و تقسیم) میباشد کلمۀ حساب اولین بار توسط محمد ابن موسی خوارزمی مطرح شد که در اولین کتاب علم حساب «کتاب الجمع و التفریق بی حساب الهند» نوشته (780-850 م) آمده، الخوارزمی این کتاب را برای توضیح قانون میراث فقهی اسلامی نوشته بود از حساب در تجارت، زمینداری، اندازه گیری، مالیات و غیره استفاده بعمل می آید.

تحولات ریاضی، غالباً به مفهوم توسعه تفکر مجرد تعبیر شده می تواند.

شاید اولین تصور مجرد اعداد باشد، یعنی مفهوم مشترک بین دو سیب و دو زردآلو، همین کمیت (دو) است. از زمان های قدیم ضمن شمارش اشیای مجسم، شمارش اشیای مجرد مانند روز ها، فصول و سال ها طرف توجه قرار می گرفتند و به تعقیب آن عملیه های حساب ابتدایی (جمع، تفریق، ضرب و تقسیم) بمیان آمدند. جهت نشان دادن اعداد، علامات و سمبول به کار رفتند که ست مکمل ان ها، ست ارقام می باشند. حساب و محاسبه تاریخ کهن دارد و قدیمیترین اشکال مختلف اعداد، همانا سمبول های مصری اند قرار ذیل:



طوریکه علامت های عدد فوق دیده می شوند، ارقام دیگر همچنین بر اساس شمارش سیستم اعشاری بود، یعنی برای هر عدد یک علامت و برای هر علامت یک عدد مطرح می گردد. مثلاً علامات که به قاعدهٔ ده ارقام امروزی (1، 2، 3 ، 4، 5، 6، 7، 8، 9) که در تمام دنیا مواد استفاده قرار می گیرند به نام ارقام عربی (هندی- عربی) شهرت دارند.
گفته می شود که این ارقام اولین بار در هندستان بمیان آمدند و بعداً توسط دانشمندان مسلمان مخصوصاً در نوشته های محمد ابن موسی خوارزمی مطرح گردید که بعداً به سایر جا ها و مخصوصاً از طریق تراجم به اروپا معرفی گردیدند.
اعداد هندی به قاعدهٔ ده بوده که سیستم اعشاری گفته می شود اما تعداد ارقام ان فقط نه رقم بود که بعد ها با علاوه شدن رقم صفر، پوره ده رقم گردید.
دانشمندان مسلمان علامت 0 را به این ارقام علاوه کردند که سیستم به این وسیله تکمیل شد و ارایه سایر اعداد ممکن گردید.
دانشمندان مسلمان تصور قیمت مطلق اعداد را داشتند و عملیه های چهار گانهٔ حسابی را بمیان آوردند.
ارقام هندی- عربی با سایر ارقام این تفاوت را دارد که درین سیستم با کاربرد ده رقم تمام اعداد ارایه شده می توانند مثلاً 123، 132، 321 وغیره...
کلمهٔ عربی ریاضی معادل اصطلاح انگلیسی Mathematics که در اصل یونانی است.
بعضاً می گویند که کلمه عربی ریاضی از اصطلاح «روض» یعنی ورزش می باشد که شاید در پرورش ذهن مورد استفاده قرار می گیرد. فرضیهٔ دیگر اینست که ریاضی از «ریاضیت» بمعنی گوشه نیشینی، خلوت گزینی معنی دارد، گرفته شده به این ترتیب ریاضیات عبارت از تفکر مجرد و زحمت کشیدن تعبیر می شود، که گویا در ریاضی دریافت معانی برای مفاهیم مجرد و تفکرات مجرد سرو کار و فعالیت دارد.
ازین جهت شاید در دورهٔ عروج کشور های اسلامی، دانشمندان ریاضی برای Mathematics، اصطلاح «ریاضی» را مورد استفاده قرار دادند. کلمهٔ انگلیسی و لاتینی Math-s تا سال 1700 م، به ستاره شناسان و فال بین ها نسبت داده میشد و ماتیماتیک دانان نزد مردم بد شمرده می شدند.
معنی ماتیماتیک (Math-s) که در بحث ما ریاضی گفته می شود، در یونانی دانش و علم و آموزش می باشد، که مطالعهٔ آشیایی مجرد (اشیایی ذهنی)، کمیت، ساختمان، خلا، تغیر وغیره در آن شامل میشود.
برای اندازه گیری، شمارش، حساب کردن با کاربرد استدلال منطقی و مجرد، ریاضی بمیان آمد و تکامل یافت.

دانشمندان ریاضی در آشیا و پدیده ها، علایم و اصول ($axioms$) را وضع کردند که برای این اصول و ادعا ها صحت و عدم صحت یا به عبارت دیگر پذیریش ورد آن به کمک ثبوت ریاضیکی تائید می کنند. ریاضی وسیله ای قوی برای تحلیل و درک جهان مادی است. تحقیقات ریاضیکی با استفاده از اصول مناسب و تعاریف دقیق به روش قیاسی معلومات حاصل می کنند و علم ریاضی برای شمارش و حساب ساده، اندازه گیری، اجسام فزیکی و اشکال هندسی و حرکات منظم با استدلال منطقی رشد یافت و بمیان آمد. نوشته های بدست آمده نشان می دهند که عملیه های ریاضی در زمان های بسیار قدیم، فعالیت عادی بشر بوده استدلال دقیق ریاضی در ریاضیات یونان مخصوصاً در «اصول اقلیدیس» بمیان آمد و رشد یافت.

در اروپا، علم ریاضی تا دورهٔ رنسانس (عصر تجدد فرهنگی 14-17 در اروپا) پیشرفت بطی داشت، اما بعد از آن با اکتشافات پیشرفت علوم طبیعی پیشرفت ریاضی تسریع گردید.

از مطالعهٔ علم ریاضی، واضح می شود که در سر زمین های که تجمع بشری زیاد بوده، اولین جرقه های علم ریاضی و مخصوصاً ریاضیات عملی ظهور نموده است. مثلاً (با در نظرداشت ترتیب زمان)، در عراق امروزی بین النهرین (سرزمین بین دو رود خانهٔ دجله و فرات) ریاضیات بابل (سومری ها)، در ساحل رود نیل ریاضیات مصری، ریاضیات یونان (که با داشتن آب و هوای مناسب پیشرفت شروع شده بود.)، ریاضی چینیایی ها (که ممتاز و مخصوص جلوه می کند.)، ریاضی هندوسند (در اطراف حوزهٔ سند) و بالاخره دورهٔ ریاضیات اسلامی. اگر دقیق شویم واضح میشود که در همه جا به استثنای ریاضیات اسلامی عوامل فقهی پیشرفت ریاضی، احتیاجات بشری بوده است.

قبل از همه در بابل، در ریاضیات سومری ها جداول ضرب، تمرین های هندسی مسایل تقسیم مطرح و عملی می شدندو ریاضیات بابل در سیستم به قاعدهٔ 60 نوشته می شد که شمارش زمانی ساعت، دقیقه و ثانیه از همانجا سر چشمه می گیرد.

در دورهٔ نهضت اسلامی، دانشمندان ریاضی خدمات زیادی در علم ریاضی انجام دادند که جهان معاصر اعتراف می کند. دانشمندان اسلامی نه تنها به ریاضی جنبهٔ تطبیقی دادند بلکه این علم را توسعه دادند یا به عبارت دیگر دانش مردهٔ را توسعه دادند، علمی ساختند، اصلاح و زنده کردند که ترقیات عصر حاضر مرهون ایشان هست.

ریاضی تعریف جامعی ندارد. اما از جوانب و جهات مختلف به آن توجیهات متفاوت داده اند ارستو، ماتیماتیک را «علم کمیت ها» دانسته بود، کیلی (563-1642) می گوید که کاینات را نمیتوان خواند، مگر آنکه زبانی را باید آموخت تا که بر آن نوشته است. وآن زبان ریاضی است که الفبای آن مثلث، دایره و سایر اشکال هندسی می باشد. گاوس (1777-1855) ریاضیات را «سلطان علوم» می داند. انشتین (1879-1955) آن را یک علم بسیار خیالی (تخیلی) و دور از زندگی حقیقی و استدلال غیر مطمئن می داند و می گوید «بجای آنکه قوانین ریاضی به واقعیت استوار باشد غیر اطمینانی است و اگر اطمینانی شود، پس به واقعیت ارجاع نمی گردد.)).

بهمین قسم گاه گاه به جوانب قیاس ریاضی، تاکید می گردد. یعنی ان را علم قیاس می دانند و گاه گاه بر جوانب تجرد آن تاکید می کنند. ریاضی، برای سایر علوم بحیث یک وسیلهٔ بسیار مهم پنداشته می شود. مخصوصاً برای علوم طبیعی، انجنیری، طب، علوم اجتماعی ریاضیات عملی ان شاخهٔ ریاضی است که در ساحهٔ علوم، دانش ریاضیکی باعث اکتشافات جدید مانند احصائیه، تیوری مسابقات وغیره عرض اندام می نماید.

فقط بهمین قسم مسایلی هم هستند که موارد خاص عملی ندارد. به عبارت دیگر ریاضی برای ریاضی.

بطور مختصر ریاضیات، علم کمیت، ساختمان (ترکیب)، هندسی، تحلیل و تعبیر در بخش های فرعی تقسیمات کنیم که تحلیل ساحات حساب، الجبر هندسه را در بر می گیرد.

کمیت ها:

مفاهیم اساسی حساب یعنی اعداد عبارت اند از اعداد طبیعی، اعداد تام اعداد نسبتی (ناطق)، اعداد غیر ناطق، اعداد حقیقی، اعداد موهومی (مختلط) که مثال های آن ها عبارت اند از:

$$-2, \frac{2}{3}, 1, 2, 1 \qquad -e, \sqrt{2}, 3, \pi \qquad 2, i, -2+3i, 2e^{i\frac{4\pi}{3}}$$

کلمهٔ الجبر برای اولین بار در کتاب محمد ابن موسی الخوارزمی بکار رفت (780-850 م) خوارزمی در دارالخلافهٔ بغداد «بست الحکمه» یک عالم و ریاضیدان بود وی در کتاب «الکتاب المختصر فی حساب الجبر و المقابله» در حدود 830 م، اولین بار علم الجبر را اساس گذاری نمود. بعد از آن کلمات الجبر و الگورتیم با نام وی مرتبط می باشد در تمام جهان و تمام السنه همین نام الجبر معمول و مروج گردیده است و تا حال کاربرد دارد. الخوارزمی طرق حل سیستماتیک معادلات خطی و معادلات درجه دوم را معرفی نمود که از ینجا علم الجبر و اصطلاح الجبر بمیان آمد. کلمهٔ «الجبر» به معنی «تکمیل کردن»، «از اطراف یک معادله عین کمیت را کم کردن» و «والمقابله» معنی توزین می باشد که به این ترتیب «الجبر و المقابله» معنی «تکمیل و توزین» می شود.

تعبیر دیگر الجبر عبارت از «جبیره» یا «پانسمان کردن» هم میباشد، که باز هم معنی تکمیل ناقص را می دهد. به عبارت دیگر الخوارزمی جهت حل معادلات پولینومی درجه دو حذف کمیت مساوی از اطراف معادله و توزین را مطرح کرد. پس الجبر در یک معادله عبارت از توزین و اعاده کردن است طوریکه از یک سمت معادله یک شی را حذف کرده، انرا به سمت دوم علاوه کردن است. و معنی مقابله، مقایسه کردن است و تغییر آن ارزیابی می شود. الجبر قسماً در سایر عناصر که سمبول ها معرفی میشوند، عملیه ها را راجع می نماید. حل معادلات و غیر مساوات ها بخش دیگری الجبر می باشد.

طریقه حل معادلات خطی و درجه دوم، الخوارزمی طبق حالات شش گانه ذیل:

مانند شکل ذیل (اگر a و b اعداد ثبت نام باشند.)، با مربع و ضریب و دو عملیهٔ الجبری «اعاده کردن و تکمیل» و دوباره به کمک «توزین یا مقابله و مقایسهٔ کردن» معادله حل می شود.

(مربع با جذور مساوی است) $ax^2 = bx$

(مربع مساوی با عدد است) $ax^2 = c$

(جذر مساوی به عدد است) $bx = c$

(مربع و عدد مساوی با جذر است) $ax^2 + c = bx$

(جذور و عدد مساوی با مربع است) $bx + c = ax^2$

به گفتهٔ خوارزمی اگر گفته شود که ده را به دو قسمت منقسم نمائید و آن را بخودش ضرب کنیم، پس نتیجه برابر با هشتاد و یک برابر خودش می شود، محاسبه:

می گویی که از 15 یک مقدار کم شده، با خودش ضرب و با صد جمع گردد، مربع همان شی و کمتر از ده برابر آن به علاوهٔ صد می شود و این مساوی با هشتاد و یک همان شی می گردد. بیست برابر آن را از مجموع مربع آن با صد جدا کن و آن مساوی به هشتاد و یک برابرش می باشد. طوریکه، مربع آن با صد برابر با 101 برابرش می شود. جذور را دو قسمت کن، یک قسمت آن پنجاه و نیم می شود و آن را بازهم با خودش ضرب کنیم که دو هزار و پنجصد و پنجاه و ربع می شود و از آن صد را کم کن، باقی اش دو هزار و چهار صد و یک ربع می گردد. و جذر آن بگیر و آن چهل و نیم می شود. آنرا از یک قسمت جذر ها کم کن که پنجاه و نیم باشد. پس یک باقی می ماند و همین را با دو قسمت از دها می باشد. با طرز تفکر معاصر عدد مطلوب x یا جذر عملیه قرار ذیل است.

$$(10-x)^2 = 81x$$
$$x^2 - 20x + 100 = 81$$
$$x^2 + 100 = 101x$$

اگر جذور معادله P و q باشند پس $pq = 100$ ، $\frac{p+q}{2} = 50\frac{1}{2}$ و

$$\frac{P-q}{2} = \sqrt{\left(\frac{P-q}{2}\right)^2 - Pq} = \sqrt{2550\frac{1}{2} - 100} = 49\frac{1}{2}$$ پس یک جذر عبارت از:

$$x = 50\frac{1}{2} - 49\,\frac{1}{2} = 1$$

است.

خوارزمی این نوع معادلات را با کلمات و عبارات بدون کاربرد سمبول ها حل نمود.

پس الجبر الخوارزمی عبارت از جمع کردن یک عدد با اطراف معادله، رفع و اجراات منفی مربعات و جذرها جذور می باشد. مثلاً شکل $x^2 = 40x - 4x^2$ به $5x^2 = 40x$ مختصر می شود. و المقابلهٔ معادله عملیه با آوردن کمیت های مشابه بیک قسمت آن گفته میشود. مثلاً $x^2 + 14 = x + 5$ به شکل مختصر $x^2 + 9 = x$ تبدیل می شود.

بهمین قسم الخوارزمی برای علم جغرافیه اولین کتاب «کتاب صورت الارض» را نوشت. کلمه الگورتیم اصلاً شکل هسپانوی نام الخوارزمی است که مفهوم هسپانوی اش روش حسابی می باشد. یعنی همان روش حسابی که الخوارزمی بکار برده بود.

مواد ممد تدریس و آموزش ریاضی

استدلال و ریاضی

علم شناسی ($Epistemotogy$) عبارت از علم ماهیت و اشکال دانش است. بر علاوه علم شناسی، شیوۀ حصول علم و منابع ان را مشخص می نماید و علم معتبر را تشخیص می نماید.

منابع علم (علم را از کجا حاصل می کنیم) متفاوت اند، و در طول تاریخ بشر، منابع مختلف برای علم معتبر پذیرفته شده واز یک اجتماع تا اجتماع دیگر تفاوت داشته است بصورت عموم منابع دانش بشر در وحی (ماء ورای طبعیت)، تجربه، استدلال یا منطق (عقل) و تحقیق خلاصه شده میتواند.

یکی از منابع و مراجع دانش بشر «استدلال» است. بشر بخاطر شناختن محیط و ماحول خود از استدلال کار گرفته و می گیرد. و استدلال به طور عمده دو قسم است. استدلال قیاسی ($Deductive \operatorname{Re} asoning$) و استدلال استقراری ($Inductive \operatorname{Re} asoning$).

قیاس یا استدلال قیاسی (بعضاً استدلال استنتاجی هم گفته میشود.) بر استدلال منطقی استوار است که در منطق از دستاورد های بزرگ ارسطو شمرده می شود. استدلال قیاسی بر یک اصل پذیرفته شده (قاعدۀ کُلی) یا اصل بدیهی (بدون ثبوت پذیرفته شده) استوار است. اصل بنیادی استدلال منطقی طوری است که با بر داشتن یک سلسله قدم های منطقی، یک ادعای معتبر از عموم در مورد خصوص نتیجه می شود. مثلاً انسان فنا پذیر است. (اصل پذیرفته شدۀ عمومی)

ارسطو یک انسان است (شی خاص)

پس ارسطو فنا پذیر است (نتیجه برای حالت خاص، از حالت عام)

یا

سیارات به دور افتاب می چرخند (اصل عمومی پذیرفته شده)

زمین یک سیاره است. (شی خاص)

پس زمین به درو آفتاب می چرخد (نتیجه برای حالت خاص از عام)

مثال برای ریاضی میتواند قرار ذیل باشد.

خطوط موازی همدیگر را قطع نمی کنند

اضلاع متقابل مربع، یا هم موازی اند

پس اضلاع متقابل مربع همدیگر را قطع نمی کنند.

به این ترتیب، این قسم استدلال، معمولاً از تیوری، مشاهدوی و از کل به صورت جز بدست می آید. به عبارت دیگر آزمایش تیوری، موضوع اساسی استدلال قیاسی می باشد. مثلاً کاربرد فورمول های ریاضیکی، جهت حل مسایل عملی،

نمونه های استدالال قیاسی شده میتوانند. مشکل استدلال قیاسی اینست که باید از قبل یک قاعده کلی موجود باشد، و سوال این است که چنین قاعده کلی از کجا بدست می آید.

استقراء یا استدلال استقرایی

قبلاً در مسایل احصائیوی و حل آنها، راجع به استدلال استقرایی بحث بعمل آمده و یک تعداد مثال های مطرح شده اند و خواهند شد. استقراء در لغت از جز به کل رفتن است و در اصطلاح عبارت از استدلال کمیت های حالات مختلف بوسیله یک ست آزمایش ها و نتیجه گرفتن از آن است. معنی استدلال استقرایی اینست که ما از یک جمعیت بزرگ "کل" یک نمونه اتفاقی (جز) را مطالعه می کنیم و اوصاف همان جزء به تمام جمعیت (کل) تعمیم داده می شود. ساینس دان ها جهت کشف قوانین مختلف طبیعت، از استدلال استقرایی استفاده می نمایند. دانشمندان علم احصائیه از استدال استقرایی کار می گیرند تا که از کمیت های جمع آوری شده، نتیجه گیری نمایند.

استدلال استقرایی ممکن است به یک (قضیه) یا ادعا منتج شود. قضیه عبارت از ادعای است که حقیقت داشته باشد، مگر صحت و عدم صحت آن به اثبات نرسیده باشد و میتواند صحیح یا غلط باشد، به عبارت دیگر پذیرفته شود یا رد گردد. استقراء یا استدلال استقرایی بر خلاف استدلال قیاسی از مشاهدات به تیوری و از جزء به کل ارجاع می گردد. در نتیجه استدلال استقرایی از روی نمونه های مشاهدوی، شاید یک قضیه یا فرضیه بدست آید. نمونه های آن را در احصائیه و در حل مسایل خواهید دید.

استدلال استقرایی در زندگی واقعی جهت ساختن قضیه یا فرضیه بسیار مفید است ولی گاه گاهی مشکل آفرین میباشد. مثلاً بعضی اوقات از آزمایش های زیاد لابراتواری و مطالعه حالات به کمک استدلال استقرایی ثابت می شود که یک دوا طور کامل مامون است، یعنی خطرات و عوارض جانبی ندارد. اما بارها اتفاق افتاده که بعداً از مدت زمانی همان دوا خطر ناک و مضر ثابت گردیده است. این گویای حقیقی است که برای ساختن یک قضیه، باید آزمایش های حالات بسیار انجام گردد تا صحت آن تضمین شود.

مسایل ریاضی و استراتیژی حل آن

مقدمه: حل مسایل، اهداف اساسی ریاضی می باشد. اگر از ریاضی در امور زندگی استفاده نگردد، آموزش آن بی معنی است و شاید برای امتحان یا شمولیت تحصیلات عالی می باشد. سوال های عبارتی (حل کردن مسایل) همان اصطلاحی است که در فرهنگ تعلیمی ما نام گرفته بود. معمولاً در ریاضی، سوال های عبارت ترسنده می باشند و طوری پنداشته می شود که استعداد خاص را ایجاب نماید. در حل کردن مسایل، شاگرد یک هدف دارد مگر به وسایل نیازمند است که این هدف را بدست آورد. پس برای شاگرد مهم است که در تدریس استراتیژی هم درس داده شود. ستراتیژی حل مسایل در تدریس، آموختن استراتیژی خودش هدف نیست بلکه طرق و روش های است که دانش آموز مسایل را حل کرده میتواند که هدف تدریس می باشد. یعنی در حل مسایل، ستراتیژی آن باید آموخته شود.

در ارتباط حل مسایل بسیار مآخذ و ممد زیاد پیدا میشود. هم در کتب، هم در دایرت المعارف ها و هم در صفحات انترنت و یا کتب و لوازم درسی سایر کشورها عبارت از مآخذ اساسی اند. اگر شما می خواهید که در حل مسایل ریاضی آن معلومات دریافت کنید می توانید به آدرس ذیل مراجعه کنید.

Billstein R., Libeskind S., Lott J. W. (1990). *A Problem Solving Approach to Mathematics for Elementary School Teachers*. California: Benjamin/Cummings Publishing Company, Ltd.

در تمام نصاب های تعلیمی جهان، حل کردن مسایل عبارت از نقطه تمرکز نصاب است. مبتنی بر این واقعیت حل کردن مسایل ریاضی هدف اساسی تمام فعالیت های ریاضیکی می باشد.

تجارب و مشاهدات نشان می دهند که بسیاری اوقات یک تعداد جوانان ممتاز که بعد از فراغت از پوهنتون، نتایج بلند کدری را بدست می آورند در نهاد های تحصیلی به حیث استاد مقرر می شوند، بعضاً تصور می کنند و ادعا دارند که (رشته من ریاضی، بیولوژی یا پیداگوژی است و من مسئولیت ندارم که در رشته دیگری بفهمم. این روش میتواند یک ضایعه بزرگ تعلیمی پنداشته شود زیرا آموزش دوازده ساله و سه یا چهار سال تحصیلات دوره لیسانس، باید هر کس این اهلیت را کسب نموده باشد که لا اقل مسایل بنیادی را بداند و لیاقت آنرا داشته باشد. یک علت اساسی این مشکل عبارت از تدریس مجرد مضامین مکاتب می باشد، یعنی ذهنیت تدریس طوری است که، حین درس مضامین از همدیگر جدا پنداشته می شوند و دانش یک مضمون در سایر مضامین مورد استفاده قرار نمی گیرد. عامل دیگر ممکن است این باشد که تدریس، معمولاً در مرتبه اول، یعنی (مرتبه کسب دانش) اکتفا می شود و سایر مراتب عالی آموزش (درک و عملی کردن، تحلیل کردن، ترکیب و ارزیابی کردن) کمتر توجه می شود. مثلاً رابطه بین حجم و کتله اجسام (که نسبت آن کثافت گفته می شود) را فارغان رشته فزیک خوب بدانند، مگر این معلومات یا اینکه مفهوم اساسی است برای فارغان سایر رشته های حتمی پنداشته نمی شود و عدم دانستن خود را فوری چنین توجیه می کنند. (رشته من فزیک نیست) بهمین قسم می پرسند که (پانزده لیتر خون بدن انسان چقدر کتله دارد) باز حتی برای فارغان رشته فزیک دشوار باشد و بعضی هم به کلی سوال را مربوط علم نمی دانند. این قسم مشکلات تنها در کشور ما نه بلکه در نظام های تعلیمی تمام جهان دیده می شود. دانشمندان تعلیمی سعی می کنند که راه های حلی مشکل را پیدا کنند، تحقیقات نشان می دهد که علل این مشکل فقط از راه تدریس رفع شده میتواند. اگر در وقت تدریس تلاش گردد که ضمن حفظ فورمول ها، بر مفاهیم و معنی آن ها تاکید شود و اینکه در ماحول و محیط خارج صنف چگونه از آن کار گرفته می شود، چه خواسته شده، چگونه معلومات از حل مسئله، مفید است، کدام درس با من کمک کرده میتواند و بالآخره تا حدی تاکید بر استفاده از موضوع صورت گیرد. استراتیژی حل مسایل تدریس و آموزش از یک طرف در حل مسایل کمک می کند و از طرف دیگر طرز تفکر سیستماتیک را تشویق می نماید و باعث تقویت فکر کردن منظم می گردد.

در بحث آینده سعی بعمل می آید که در ارتباط حل مسایل، تعدادی مفاهیم استراتیژی حل با مثال های جالب معرفی گردد.

مسئله چیست؟

یک مسئله وقتی وجود دارد که کسی برایش جواب تهیه شده نداشته باشد و طریقه آماده حل آن بدسترس نباشد، برعلاوه مسئله برای کسی یا مرجعی مشکل آفرین مورد حمایت باشد. در اکثر کتب ریاضی سوال ها طوری مطرح می شوند که موازی با محتوای دروس که تفکر و تکرار اضافی را هم باعث گردد. این گونه مسایل برای بسیاری دانش آموزان یک نوع تمرین است و اما برای صنف دوم یک مسئله می باشد. طور مثال: $12 \times 4 = ?$

مثال فوق برای شاگردان صنف هشتم یک تمرین است و اما برای اکثر شاگردان صنوف دوم مسئله است. در کتب مکتب اکثر سوالات شبیه مثال های ذیل (بخش سوالات آن) می باشد.

مثال: سوال: حجم یک جسم 5 لیتر و کثافت آن $0.9\ kg/l$ (کیلوگرام فی لیتر) است. کتله آن چند است؟

این نوع سوال جهت حل همین قدر کافی است که شاگرد فورمول کثافت را بداند (کثافت = کتله بر حجم یا $D = \frac{m}{v}$.

به این ترتیب، چنین سوالاتی فقط برای تمرین فورمول مفید است اما برای درک مفهوم کمتر کمک مینماید. جواب دهنده، فورمول را بیادش می آورد تا جواب را آماده کند. اما اگر این سوال به قسم دیگری مطرح شود، میتواند جواب دیگر آموزش (درک کردن، استفاده در مسایل عملی، تحلیل و غیره) خوب تشویق و تقویه نماید.

مسئله: در بدن انسان تقریباً 5 لیتر خون است آیا گفته می توانیم که کتله آن چند کیلو گرام خواهد بود.

در این صورت شاگرد تشویق می گردد که رابطه بین کتله و حجم، اینکه چگونه معلومات داده شده، دیگر چه به کار است؟ از کجا پیدا شود. باعث و سایر راه های حل کدام اند، و بیشتر در مورد آن فکر کنید. به این ترتیب مسایل آموختن شاگردان و جواب مختلف آن می گردد. در این نوع مسئله شاید شاگرد بداند که کثافت خون داده نشده و از جای دیگری آن را پیدا کند.

یک مثال دیگر: سوال شعاع یک دایره $r = 6400km$ است، محیط آن را پیدا کنید.

این سوال هم مانند سوالات معمولی کتب درسی و تمرین فورمول های ریاضیکی می باشد و فقط آموختن نظری فورمول ها را تشویق می نماید. این سوال بحیث یک مسئله قرار ذیل نیز مطرح شده می تواند.

مسئله: اگر شعاع کره زمین $r = 6400km$ باشد، طول خط استوا چند کیلومتر است؟

جهت حل این مسئله باید بدانیم که درین مسئله چه خواسته شده (طول خط استوا) کدام معلومات داده شده (فقط شعاع کره زمین)، به کدام معلومات بیشتر ضرورت است (اینکه خط استوا – دایره ایست که کره زمین را احاطه کرده و اینکه طول خط استوا، یعنی دریافت طول دایره عظیمه که همانا خط استوا است) و بالآخره اینکه بین محیط و شعاع دایره چه رابطه ای موجود است.

در ریاضی استعمال فورمول ها، اهداف خودش را دارد، اما ممکن شاگردان جهت حل این قسم تمرین ها با مسایل روبرو نشده اند و کفایت حل این گونه مسایل درآن ها انکشاف نکرده باشد.

استراتیژی حل مسایل

جورج پول (1887–1986) یک ریاضیدان امریکایی هنگری الاصل در کتاب خود راجع به لذت حل مسایل می نویسد:

حل مسئله بزرگ، کشفیات بزرگ را ایجاب می کند، لیکن در حل هر مسئله تخم کشفیات موجود است. مسئله داده شده برای شما شاید بزرگ نباشد، اما اگر کنجکاوی شما را تحریک کند و اگر وسایل ابتکار و ساعت تیری تو را ترغیب نماید و اگر به وسایل خود آن را حل کنی، پس لذت کامیابی از راه کشف را احساس می کنی.

جورج پولیا جهت حل مسایل، پروسه چهار مرحله ای را طرح و پیشنهاد کرده که جزئیات آن قرار ذیل است.

1. درک مسئله
   a. آیا مسئله را در زبان خود و عبارات خودش بیان کرده میتوانی؟
   b. تلاش پیدا کردن چه چیزی را داری و یا چه می خواهی بکنی؟
   c. چه چیز نامعلوم است؟
   d. از مسئله کدام معلومات به دست می آید؟ (کدام معلومات در آن داده شده؟)
   e. کدام معلومات ناقص است؟
2. ساختن پلان حل مسئله
   درینمورد استراتیژی های فهرست شده ذیل بسیار مفید اند.
   a. علایم و نشانه های مشترک در آن را به بینید
   b. مسایل مشابه را آزمایش کنید و به بینید اگر عین روش در کار باشد.
   c. یک مسئله ساده و مختصر را از آن در نظر گیرید، ممکن است کمی روشنی برآن انداخته بتوانیم و جرقه حل را درآن پیدا کنیم.
   d. یک جدول یا گراف برایش بسازیم.
   e. یک معادله برایش بنویسید.
   f. حدس بزنید و آزمایش کنید.
   g. دوباره آن را برعکس حل نمایید.
   h. یک هدف فرعی برایش انتخاب نمایید.
3. عملی کردن پلان طرح شده
   a. استراتیژی های محتوای قدم دوم فوق الذکر را عملی کنید و محاسبات لازم را انجام دهید.
   b. هر مرحله پلان را امتحان و ارزیابی کنید.
   c. کار خود را طور دقیق ثبت نمایید.
4. ارزیابی (بازبینی؟)
   a. نتایج بدست آمده را در اصل مسئله امتحان نمایید.
   b. حل خود را در روشنی اصل مسئله تعبیر کنید (یعنی چه؟)
   c. تحقیق کنید که آیا روشی دیگری هم برای حل مسئله وجود دارد؟
   d. در صورت امکان مسایل مشابه و جامعتر را تعین کنید، طوری که برای شما درینمورد کار آمد باشد.

استراتیژی چهار مرحله ای فوق الذکر، همیشه حل مسایل را تضمین کرده نمیتواند، اما مشوره های مفید و رهنمایی شمرده می شوند.

وظیفه معلمان و مخصوصاً معلمان ریاضی اینست که برای شاگردان خود تا حد ممکن مسایل زیاد و متنوع را بدهید و توسط آن ها مسایل را حل نماید.

در کتاب های درسی سابقه نظام تعلیمی، مخصوصاً کتب هندسه، استراتیژی حل قضایا، یک نوع شکل مدنظر بود که دران اول (قضیه) بعداً (مفروض) باز (مطلوب) و بالاخره (ثبوت) طرح می شد.

این میتواند یک استراتیژی چهار مرحله ای پولیای تعبیر گردد.

درینجا (قضیه) مسئله یا سوال، مطلوب توضیح مسئله که چه خواسته شده، مفروض پلان حل و بالآخره (ثبوت) عملی کردن پلان و حل مسئله است.

استراتیژی چهار مرحله ای حل مسایل در قدم دوم در مسئله علامات (رموز) جستجو می شود. علاوه برآنکه بسیار مهم است اما در فرهنگ تعلیمی، بر آن کار نمی شود. در ذیل راجع به آن روشنی می اندازیم تا معلمان و شاگردان آن را بدانند و از آن استفاده نمایند.

جستجوی نشانه ها، علایم یا عروض در مسایل

در استراتیژی حل مسایل، جستجوی علایم و زموز مکاشفات بسیار مهم است. در حل مسایل ساینسی و ریاضی، وجوهات مشترک و علایم آن ها، جستجو می گردد. ممکن است این نشانه ها راه حل را پیدا کند و یا نه.

استدلال کردن بر پایه کمیت های به دست آمده از یک ست آزمایش ها و نتیجه گیری بر اساس آن را استدلال استقرایی می گویند. استدلال استقرایی میتواند به یک قضیه یا ادعا منجر گردد. قضیه نیز یک بیانیه است که درست پنداشته می شود. اما صحت بودن آن ثبوت نشده باشد یعنی میتواند قبول و یا رد گردد. یعنی ممکن است قضیه ای که به روش استقرایی اثبات گردیده، توسط یک (مثال نقیض) غلط ثابت شود. مثال ها ذیل را در نظر می گیریم.

مثال اول: از ردیف اعداد ذیل سه حد بعدی را دریافت کنید.

$1, 2, 4, .____.____._____.$

حل: تفاوت دو حد اول یک است $(2-1=1)$ و تفاوت حد سوم و چهارم 2 میباشد $(4-2=2)$، پس تفاوت دو حد متعاقب شاید 3 و حدود بعدی 4 باشد به همین قسم تا آخر. پس میتوان ادعا کرد که ردیف داده شده عبارت است از

$$1,\ 2,\ 4,\ 8,\ 16,\ 32$$

این مثال نشان می دهد که معلومات داده شده میتواند زموز دیگری نیز باشد پس باید قبل از نتیجه گیری به دقت بررسی شود.

مثال دوم: برای تکمیل ردیف ذیل، حدودی را دریافت کنید

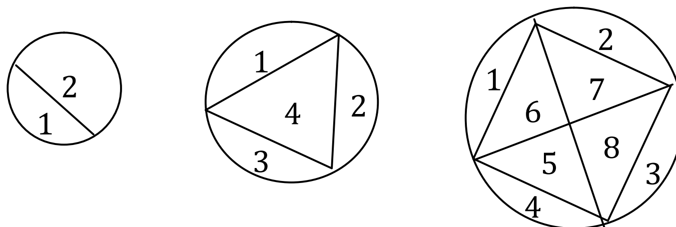
□، △، △، □، △، △، □، _____، _____، _____

حل: دیده می شود که در میان هر دو مربع، دو مثلث حادالزاویه واقع است. پس گفته میتوانیم که حدودی بعدی نیز به همین ترتیب ادامه دارد یعنی

□ △ △ □ △ △ □ △ △ □

مثال دوم: مطابق شکل ذیل، روی محیط دایره تعداد نقاط را تعین می کنیم و آن ها بهم وصل می نماییم پس داخل دایره به ساحات مختلف تقسیم می گردد.

طوری که دیده می شود دو نقطه دایره اول را به دو قسمت، 3 نقطه دایره دوم را به چهار قسمت و چهار نقطه، آنرا به 8 قسمت تقسیم می کند.

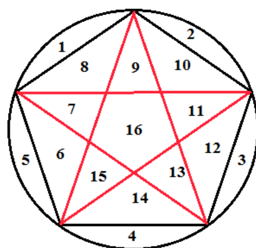


تعداد دوازده نقطه، داخل دایره را به چند قسمت تقسیم خواهد کرد. به صورت عموم برای n نقطه، تعداد انقسام چند است.

ارقام مشکل فوق در جدول ذیل تنظیم شده اند، دیده می شود که با اضافه هر نقطه تعداد ساحات قبلی دو برابر می گردد، اگر این رمز درست باشد، پس برای 5 نقطه 16 یا 2^4 ساحه و برای 6 نقطه 32 یا 2^5 ساحه بدست می آید بهمین قسم ادامه می یابد. یعنی در هر مرحله دو به توان یک واحد کمتر از ترتیب موقعیت آن حاصل می گردد.

شمار نقاط	2	3	4	5	6	⋯	12	⋯	N
تعداد ساحات	$2=2^1$	$4=2^2$	$8=2^3$						

اگر حل مسئله بر اساس این رمز مطرح شود، پس از 12 نقطه 2^{11} یعنی 2048 ساحه به دست می آید و بصورت عموم برای n تعداد ساحات 2^{n-1} می باشد. می بینیم که 5 به 16 ساحه یعنی 2^4 (شکل ذیل) است که ادعای قبلی ثابت مینماید. هرگاه واقعیت را در یک قدم بعدتر جستجو کنیم.



عملاً از شکل 2 دیده می شود که ساحات 31 است و این ادعای $2^5 = 32$ را رد می کند. پس این مثال ادعای را که بر اساس آن 2^{n-1} ساحه n نقطه ساخته می شود، غلط است. این گونه ادعا برای 7 نقطه و 12 نقطه نیز درست نیست. و این نتیجه در مقابل نتیجه دیگری اولی حیران کننده است.

مثال فوق مارا متوجه خطراتی می سازد که فقط در اثر آزمایش های محدود به وجود آیند.

باید بدانیم که n نقطه روی محیط دایره، تعداد ساحاتی مطابق فورمول ذیل می سازد.

$$(n = 1,2,3,4, \dots ,31, \dots , n)$$

$$\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{24}+\frac{n(n-1)}{2}+1$$

مثال ترادف حسابی (تصاعد حسابی)

دریک ردیف حدودش طوری اوضیح می گردد که به ترتیب عددی مینوسیم یعنی اول، دوم، سوم، وغیره

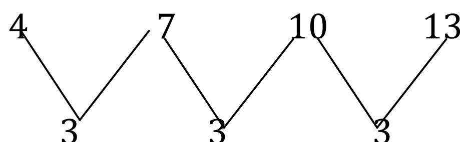
اگر هر حد با جمع کردن حد قبلی رس یک عدد معین بدست آید، این تصاعد را تصاعد حسابی می گویند.

مثال: درشکل ذیل رموزی را پیداکنید که در آن تعداد سیخ های گوکرد دریافت گردد.

□ ، □□ ، □□□ ، □□□□ ، ـــــ، ـــــ، ـــــ

حل: دیده می شود که تعداد سیخ های گوگرد 4، 10،7 و 13 می باشد و تفاوت بین هردو مرحله 3 است.

حدود ردیف:



تفاوت:

اگر درین ردیف این صفت ادامه یابد باید تعداد حدود بعدی 16، 19 و 22 باشند. از شکل واضح است که در هر حد سه سیخ نسبت به حد بعدی مورد ضرورت است.

زمانی این روش مفید است که دریک ردیف، حدود آن یکی پی دیگری پیشبینی شده بتواند. جهت دریافت چنین کیمیت های ساختن جدول کمکی وسیله مفید است.

در جدول ذیل شماره حدود و تعداد عناصر تنظیم گردیده است.

شماره حد	حد
1	4
2	$1\cdot3+4=3+4=7$
3	$2\cdot3+4=3+3+4=10$
4	$3\cdot3+4=3+3+3+4=13$
.	.
.	.
.	.

اگر به جدول فوق نظر اندازیم، هریک از حدود نسبت به حد قبلی اش 3 و احد کمتراست. مثلاً حد دوم نسبت به حد اول 3 و حد سوم دو دفعه 3 و حد چهارم سه دفعه 3 و بهمین قسم ادامه میابد. پس حد دهم $3\cdot9+4$ یا 31 و حد صدم $4+3\cdot99$ یا 301 می باشد. به این ترتیب روش پیش بینی حدود یکی بعد از دیگری بدشت آمد و بنابرین تعداد حد n ام عبارت از $4+(n-1)3$ است.

بعضی از شما از نظر الجبر شاید این مقدار را $3n+1$ بدانند که معادل $4+(n-1)3$ است. به این ترتیب ردیف حد 200 عبارت از $4+(200-1)3=601$ می باشد. از این فورمول در یک ردیف شماره یک حد را میتوان پیدا کر به شرطی که قیمت یک حد داده شده باشد؟ مثلاً اگر قیمت یک حد 1798 باشد، شماره حدود نعین می کنیم

می دانیم که

$$4+(n-1)^3=1798$$

و: $$(n-1)^3=1798-4=1794$$

پس: $$n-1=\frac{1794}{3}=598$$

$$n=599$$

سایر مسایل مربوط در کتب مکتب و جود دارند.

یادداشت: سوال فوق معمولاً در تدریس مروج چنین مطرح می گردد.

حد اول یک تصاعد حسابی 4 و تفاضل مشترک آن 3 است حد صدم ان را دریافت کنید.

مطرح ساختن چنین سوال های یاد اوری فورمول و حل معادله را تشویق مینماید و تمرین تمرین های کتب درسی مکتب می باشد. اما به قسمی که فوقاً بحث بعمل آمد، دریافت فهم،عملی ساختن، تحلیل مسئله، کاربرد تحلیل و ترکیب مسایل مختلف، ارزیابی حال ها و تعین حل مناسب در آن مطرح می شود. به این قسم نه تنها یاد اوری فورمول های حفظ شده و اموختن حل معادله ریاضی و مراتب بلندتر آموزش تقویت می شود بلکه اهداف اساسی در تعلیم است.

در تدریس مروج تا حد ممکن در اموزش دانش لازمی را تشویق مینماید.

عملیه استعمال حل مسائل:

جمله ذیل را بخوانید

در یک درخت 10 پرنده نشسته اند، یک طفل بازدن سنگ یکی از آن ها را به زمین انداخت، چند پرنده دیگر باقی مانده است؟

جواب سوال فوق این است که هیچ پرنده دیگر باقی نمی ماند. متوجه می شویم که اگر سوال را درست درک نکرده باشیم این جواب را ارائه داده نمی توانیم.

طوریکه قبلاً گفتیم پروسه چهار مر حله ای حل مسائل، مفید بوردن کار را تخمین نمی کند مگر روش حل سیستماتیک مسئله را نشان می دهد. چهار مرحله را قرارذیل مطرح مینمایم.

مرحله اول: درک مئله (سوال)

درک مسئله تنها مهارت خواندن نه بلکه دانستن انیکه چه خوااسته شده؟ کدام معلومات داده شده؟ کدام معلومات کمبود و کدام غیر ضروری است؟

مثال های ذیل را در نظر به گیرید.

سلام و صالح در دوروس کورس عقیدهوی غرض شمولیت رفتند. فیس کروس برای یک نفر 100 افغانی بوده، سلام نوت پنجصدی را داد وسه صد افغانی را دریافت کرد. در ساعت ده ونیم، در کانتین کورس، صالح دو قطی جوس هر کدام 10 افغانی دو بیسکویت هر یک 5 افغانی گرفتند. ایشان 15 کم 12 بجه از کورس بیرون شدند. بگوئید مصرف جوس ایشان چندبود؟

در متن فوق مطلوب واضح است ما مطالب غیر ضروری نیز درآن وجود دارد.

فقط معلومات مهم در آن قیمت جوس 10 افغانی است اینکه دو جوس خریده پس مصرف 20 افغانی می شود.

مثال: عیدل فطر در اول ماه و عید اضحیٔ در دهم ماه می باشند. بگوئید در بین این دو عید از روز اول چند روز است؟

درین مثال معلومات غیر ضوروی نیست مگر اضافی محد نیاز وجود دارد.

اول اینکه ماه های عید فطر (شوال) و دواقعده در بین رمضان و عیدالاضحیٔ واقع اند. دوم اینکه، این ماه ها هر کدام چند روز می باشند. بالاخره اینکه مفهوم (در میان دو عید) یعنی چی؟

در ریاضی اصطلاح (در میان) مشمول نیست، یعنی روزهای اول عید فطر و عیداضحیٔ در ان شامل نمی باشد. پس این دو روز شامل روز های (در میان) نمی شوند.

مرحله دوم: ساختن پلان حل مسئله عبارت از استراتیژی حل مسئله می باشد که در حل آن کمک کرده بتواند. در حل سوالات چه پیشنهاد های شده نمیتواند. در حل مسئله دانستن استراتیژی های مختلف مفید بوده میتواند.

استراتیژی یک نوع وسایلی است که در حل مسئله باشد و درک حالات عمومی را تقویت می نماید به استفاده متل قدیمی که:

اگر کسی را یک روز یک لقمه نان داده باشی، روزی تورا سیرمی کند

اگر به کسی یختن یک لقمه نان را بیاموزی، در تمام عمر شک تورا سیر می کند.

مرحله سوم: طرح ساختن پلان شده

درین مرحله عملی ساختن استراتیژی انتخاب شده است.

اگر یک استراتیژی پیش بینی شده کارندهد، باید در جستجوی دیگر بود.

درین مرحله با اجرای تعدادی عملیه های حسابی و الجبری ، حل مسئله جستجومی گردد.

مرحله چهارم: ارزیابی:

در مرحله ارزیابی، حل در یافت را بری مسئله امتحان و چک می کنیم که ایا جواب مربوطه منطقی است؟ و یا این حل مسئله را صدقه می کند، بر علاوه باید توسعه حل مربوطه را نیز مطرح کنیم و به بینیم که راه های دیگری برای حل نیز وجود دارند یاخیر؟ دربسیاری موارد توسعه حل، از اصل حل خیلی جالب می باشد.

مثال خای چند استراتیژی حل مسائل صـ20

هنگام حل مسائل، شاگرد یک حرف دارد که باید آن را بدست اورد، اما شاید شاگرد وسایل حصول آن را نداشته باشد. استراتیژی حل عبارت از افزار و وسایلی اندکه جهت براوده شدن هدف کمک نماید. یک تعداد با استراتیژی های با مثال توضیح گردیده اند.

1. ملاحظه رموز مشترک یک پدیده

در صفحات قبلی، در مثال های ردیف ها، رموز مشترک را بیان کردیم، دراینجا باز هم به خو مشابه، به جستجو دوام می دهیم.

مسئله اول

زمانی که ریاضیدان معروف جرمنی، گاوس بود، معلم او شاگردان صنف را وظیفه داد تا اعداد مسلسل طبیعی کوچکتر از 100 را محاسبه نمایند و تصورمی کردکه شاید مجموع شاگردان مدتی مصروف شوند، اما گاوس فوری جواب را ارائه داد. شما نیز میتوانید جواب بدست ارید.

1. درک مسئله: اعداد طبیعی عبارت از 1،2،3،4،... اند و خواسته شده که مجموعه $1+2+3+\cdots+100$ را بدست ارید.
2. طراحی پلان: یک استراتیژی ممکن عبارت از ملاحظه رموز نشان ها است.

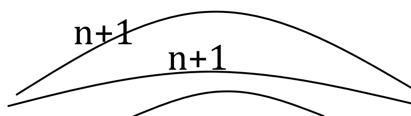
اگر دقت کنیم که در ردیف $100+1, \quad 2+99, 3+98, \cdots, 50+51$ پنجاه جوره عدد وجود دارند که مجموعه هر جوره مساوی 101 می باشد. شکل ذیل

$$1+2+3+...+50+51+...+98+99+100$$

3. تظبیق پلان: طوری که دیده می شود، مجموعه مطلوب عبارت از مجموع پنجاه دفعه عدد مساوی 101 می باشد، پس این مجموعه $50\ 50=(101)\ 50$ است.
4. ارزایابی: طریقه فوق درست است، زیرا مجموع پنجاه دفعه 101 مساوی به مجموع مطلوب می باشد. حال برای هر عدد طبیعی n مجموعه عددی

$$1+2+3+\cdots+\mathrm{n}=?$$

بحیث سوال مطرح می کنیم. باز هم طبق الگوی قبلی مجموعه از موضوع را در نظر می گریم.



$$1+\ 2+\ 3+\ \dots\ \ +\ (n-2)+\ (n-1)+\ \ n$$

که درینجا n یک عدد جفت می باشد، بنابرین مشابه حالت قبلی مجموعه فوق عبارت است از مجموع $\frac{n}{2}$ عددکه هرکدام $n+1$ می باشند. پس مجموعه مساوی $\frac{n(n+1)}{2}$ می باشد. اگر n تاق باشد باز هم عین فورمول صدق می کند؟ این سوال جهت فکر کردن به خود شما واگزار می شود.

2. استراتیژی جدول سازی: برای حل مسائل، ساختن جدول یک استراتیژی تطبیق و مهم می باشد. یک جدول میتواند جهت خلاصه کردن کمیت ها (معلومات) بکاربرود و یا ازین سبب ساخته شود که رموز مشترک اعداد دران به مشاهده برسد و همچنین در جدول میتوان تمام حالات ممکنه را مشاهده نمایم.
3. مسئله دوم: مثال قبلی را که مربوط ردیف (تصاعد) حسابی و مجموع آن بود در نظر می گیریم و میخواهیم حل آن را تعمیم دهیم. در تصاعد حسابی عنصر اول a و تفاضل مشترک d مدنظر است. میتوانیم دقیق شویم که ردیف عددی$\cdots$, $a+3d$ و $a+2d$ و $a+d$ و a مطرح بحث می باشد که مجموعه آن چند خواهد بود.

شماره حد	حد
1	
2	$a+d$
3	$a+2d$
4	$a+3d$
.	.
.	.
.	.
N	$a+(n-1)d$

طوری که از جدول به مشاهده می شد، مجموع n عنصر مسلسل تصاعد حسابی با حداول a و تفاصل مشترک d عبارت است از $A_n = a+(n-1)d$

فرض کنیم که: ترادف $(\cdots 25\ ,\ 21\ ,\ 17\ ,\ 13\ ,\ 9\ ,\ 5)$ که حد اول آن $a=5$ و تفاضل مشترک $d=4$ می باشد، پس n حد حد n ام آن عبارت است از

$$An = a + (n-1)d = 5 + (n-1)4 = 5 + 4n - 4 = 4n + 1$$

مثال: اگر در یک تصاعد عدد حسابی حد سوم 13 و حد سی ام 121 باشد حدود اول و دوم آن را تعین کنید.

حل: بر اساس قاعده فوق الذکر، حد n ام تصاعد با $a+(n-1)d$ باشد و جدول را قرار ذیل مطرح می کنیم.

شماره حد	حد
1	?
2	?
3	13
4	$13+d$
5	$13+2d$
6	
.	.
.	.
.	.
30	?

حد سی ام تصاعد عبارت از $13+\square d$ باید باشد چون چهارم $13+d$ می باشد پس حد بنجم آن $13+2d$ خواهد بود در تصاعد d های آن از نمبر حد سه واحد کمتر می باشد، بنابرین حد سی ام آن $(13+27d)$ می باشد و حد مذکور (121) داده شده پس داریم که،

$$13+27d=121$$

یا: $27d=108$

پس: $d=4$

پس حد دوم آن $(13-4=9)$، و حد اول آن $(9-4=5)$ می باشد.

3. استراتیژی نوشتن یک معادله

این استراتیژی در حل مسایل الجبری مورد استفاده قرار می گیرد. جهت دریافت حل مسئله باید معلومات داده شده را در قالب سمبول ها و توضیحات کیمت ها ارایه کنیم مثال ذیل را به بینید.

مثال: یک معلم به شاگردان گفت که: یک عدد را در دلی خود انتخاب کنید یا عدد مذکور 15 را جمع کرده و مجوعه را با 4 ضرب ازان 8 را تفریق نمایید و متباقی را بر 4 تقسیم کنید از همین خارج قسمت 12 تفریق کنید و عدد باقی باقی 4 بمن نشان دهید و من بشما می گویم که کدام عدد را در دلی خود گرفته اید.

حل: برای انیکه مسئله را تحلیل کنیم و ببینیم که چگونه عدد دریافت می شود، معلومات داده شده را بع دستور های الجبری تبدیل می کنیم.

(جدول ذیل)

رهنمایی	بحث	سمبول
یک عدد را در دل بگیرید 15 را باآن جمع کنید مجموعه را به 4 ضرب کنید از عدد بیدت آمده 8 کم کنید تفاوت اخیر را بر 4 تقسیم کنید از خارج قسمت 12 کم شود جواب را بگوئید	عدد مطلوب را n می نامیم عدد 15 با n جمع می شود کفته شده مجموعه اخیر با 4 ضرب شود از حاصل هشت تفریق گردد یعنی $4(n+15)-18$ بر 4 تقسیم شود بالاخره از خارج قسمت 12 تفریق می شود	$n+15$ $4(n+15)$ $4(n+15)-8$ $\frac{4(n+15)}{4}-8$ $\frac{4(n+15)-8}{4}-12$

اگر حل کنیم داریم که

$$\frac{4(n+15)}{4}-12=n+1$$

بگوئید که از کجا می داند که عدد مطلوب چند است؟

تعدادی جمله ها و عبارت های زبانی که در سوال های عبارتی که معمولاً به کارمی آید با سمبول های آن در جدول ذیل داده شده.

از a به اندازه n بزرگتر	$n+a$
از a به اندازه n کمتر	$n-a$
n برابر a (n چند a)	$n\cdot a$
تفاوت n و a	$n-a$
مجموعه n و a	$n+a$
مجموعه مربعاتn و a	n^2+a^2
مربرع تفاضل a و n	$(a-n)^2$
نصف a	$\frac{a}{2}$
دو برابر مجموعه a و n	$2\cdot(a+n)$

معنی الجبر اینست که یک وزن را از یک پله ترازوی متعادل برداشته و آن را از سمت دیگرش کم کنیم. حل الجبری، جز از حل معادلات و نامساوات های می باشد.

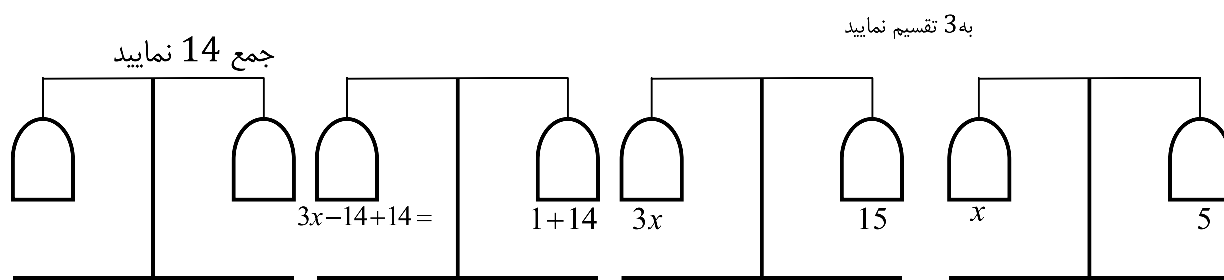
الجبر_ علمی است که روی اعداد و سایر عناصر که یو سیله سمبول ها معرفی می شوند، یک تعداد عملیه ها اجرا می نماید.

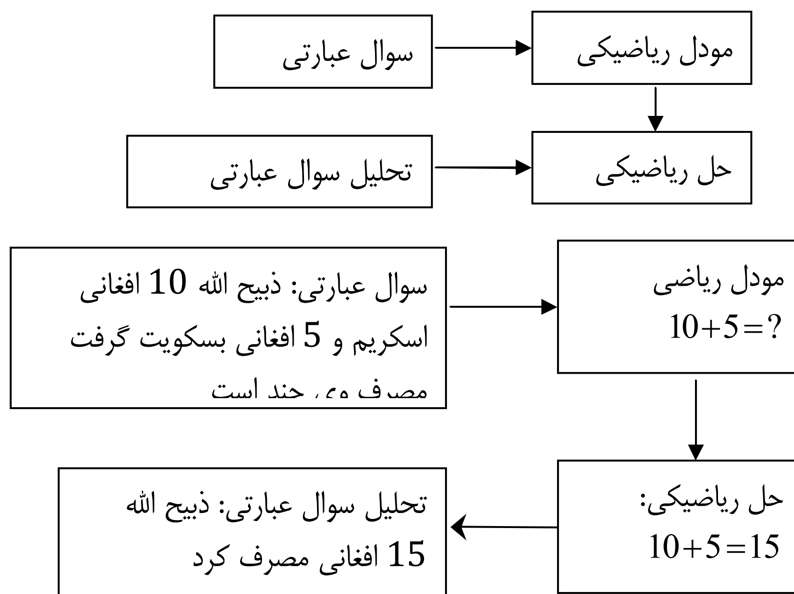
جهت حل معادلات از توازن پله های ترازو کار گرفته می توانیم. مثلاً $3x-14=1$ علامت مساوات نشان می دهد که هر دو طرف یاهم متوازن می باشند از پله ترازو 14 را به سمت دوم می اندازیم شکل اول صـ25

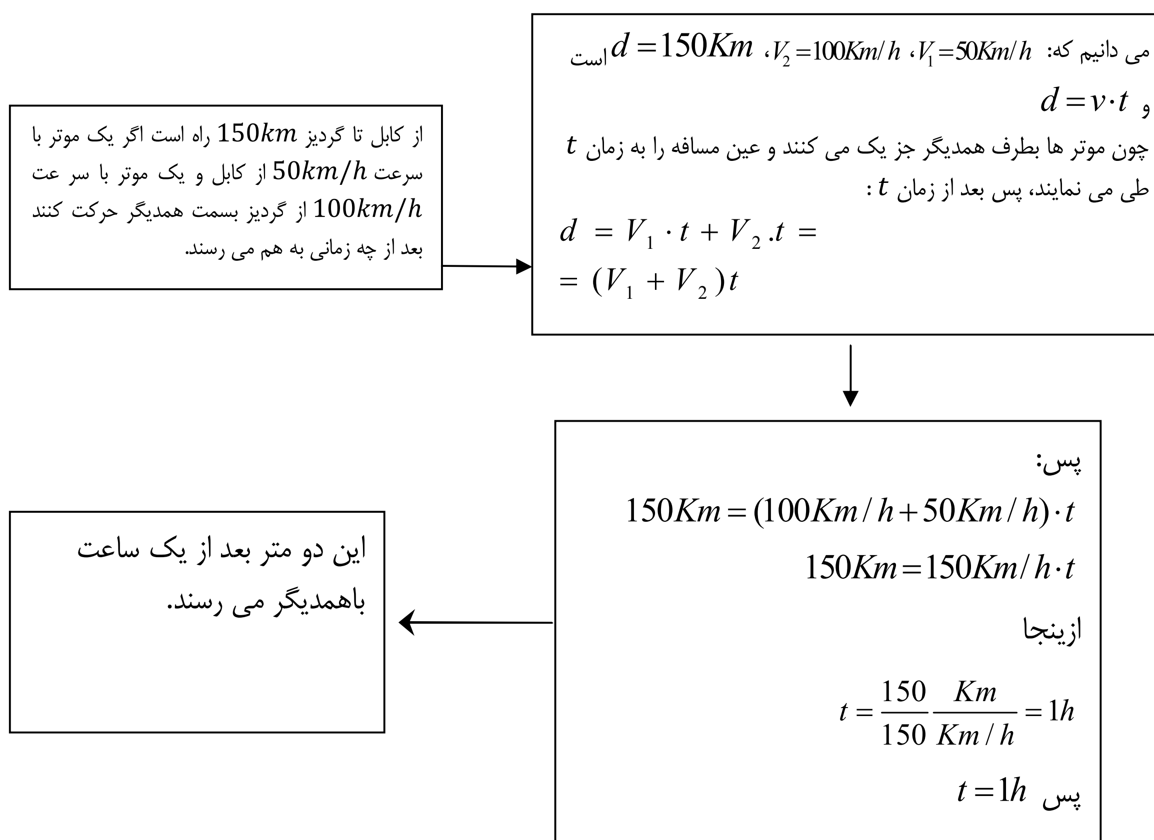
باز هم توازن برقرا است. برای دریافت x به دو سمت طوری عملیات انجام می دهیم که مساوات بر هم نخورد این عملیه را تا زمانی ادامه می دهیم مه در یک سمت x باقی مانده شکل اخیر صـ25

الجبر در حل مسایل زیاد کاربرد دارد. در صنوف ابتدایی مسایل ساده باید تقویت شوند تا شاگردان باید تمرینات یا سطح پایین را انجام دهند تا که تدریجاً بتوانند مسایل لازمی پچیده را حل نمایند.

مودل ذیل حل مساید را ساده می سازد







توجه: در ورق قلمی نوشته شده (در همین صفحه چند سطر زیر شکل امده ترجمه نشد).

در قدم دوم،یعنی طرح پلان، معلوم و مجهول داده شده که انرا به معادله یا غیر مساوت تبدیل باید کرد.

در قدم سوم، یعنی ارزیابی، که حل بدست آمده را در اصل مسئله تتعبیر و چک می کنیم

خالد و زینب به 22500 افغانی لوازم خانه گرفتند، 4500 نقدّراختند و باقیمانده آن به 8 قسط ادا می کنند. بگوئید که در هر قست چند پرداخت نمایند؟

حل:

1- هر قسط p فرض می کنیم:

تمام قسط ها $=8P$.

قیمت تمام لوازم $4500+8P$

2- حال معادله را می سازیم: $8P+4500=22500$

3- اکنون معدله تشکیل شده را حل می نمایم:

$8P+4500-4500=22500-4500$

$8P=18000$

$P=\frac{18000}{8}\Rightarrow P=2250$

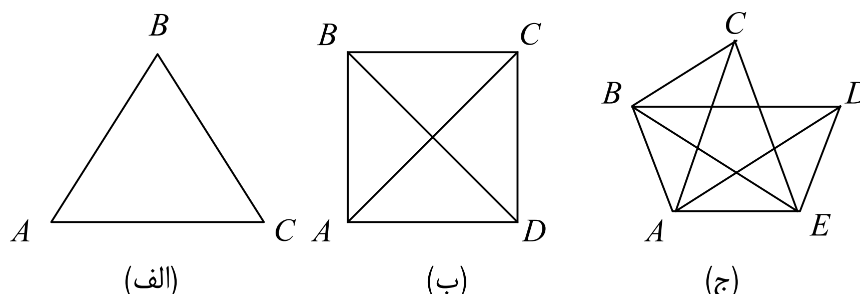
4. استراتیژی ساختن دیاگرام (ارایه گرافیک):

می گویند که یک تصویر از هندسه لفظ بیشتر ارزش دارد. این گفته برای حل مسایل اهمیت بشتر دارد. اشکال در هندسه< درحل مسایل روشنی می اندازند. مگر مسایل غیر هندسه نیز، اشکال کمک می کنند. مثال ذیل را در نظر می گریم.

مثال: تعداد شاگردان صنف دهم یک مکتب 20 نفر است. در روز اول شورع مکتب همه باهمدیگر جور پرسان می کنند. اگز هر کدام با هر هم صنفی خود، یک دفعه دست بدعد تماماً چند دست دادن انجام می شود؟

قدم اول: (درک مسئله). تماماً 20 نفر است. دو دو باهم دست می دهند اگر هر کدام فقط یک دفعه با هم صنفی اش دست بدهد، پس بگوئید چند دست دادن انجام می شود؟

قدم دوم: یک طریق این است که 20 نفر است استاده کشیم و تعداد دست دادن ها را بشماریم، این روش است، مگر میتوان راه های دلچپسی دیگری را نیز جستجو کرد یکی ازین راه ها ترسیم دیاگرام است. میتوانیم دونفر را مثلاً A و B در انجام ها (یک خط مدنظر گیریم و بهمین قسم برای 3 ، 4 ، 5 دست دادن اشکال ذیل مطرح می شوند.



(الف) (ب) (ج)

بعد از رسم یک خط مستقیم بین هردو، نقطه کافی است، طبق شکل برای نفر دست دادن می بینیم که A با چهار نفر B, C, D و E دست می دهند(4 دست دادن) بهمین قسم B نیز با A، B، C، D و E دست می دهد (4 دست دادن) بهمین قسم برای هر نفز چهار دست دادن ممکن می باشد، پس تماماً $20=4\cdot 5$ می شود.

امادمی بینیم که دست دادن بین هر دونفر، دودفعه تکرار می گردد (A با B و واپس B با A دست دادن). پس حالت درست این است که تعداد دست دادن های فوق بردو تقسیم گردد یعنی $\frac{5+4}{2}=10$ می شود این روش برای تعداد افراد صدق می کند.

قدم سوم: به این قسم دیده می شود که دست دادن های 20 نفر عبارت از $\frac{20\times 19}{2}=190$ دفعه اتفاق می افتد.

قدم چهارم: (ارزیابی) اگر به بینیم که برای یک نفر هیچ دشت دادنی در کانیست، اگر دو نفر با شند فقط یک دست دادن و برای 3 نفر یک با دو نفر دست دادن علاوه می گردد یعنی 3 دست دادن می شود. یعنی $3=2+1$دست دادن، بهمین اگر چهار نفر باشند یعنی سومی با هرسه نفر دست می دهد پس جمعاً $6=3+2+1$ دست دادن موجود می آید و بهمین قسم برای 5 نفر $10=+3+2+1$ دست دادن ایجاد می گردد.

دیده می شود که عدد نهای 4 و تعداد اشخاص 5 می باشند پس برای بیست نفر $(19+\cdots+4+3+2+1)$ می باشند.

تعداد دست دادن ها	تعداد اشخاص
0	1
1	2
$1+2=3$	3
$1+2+3=6$	4
$1+2+3+4=10$	5

جهت محاسبه، دست دادن ها درین مجموعه میتوان از فورمول گاوس استفاده کنیم یعنی

$$(1+2+3+4+\cdots+19)=\frac{20\times19}{2}=190$$

پس تعداد تمام دست دادن ها 190 می شود.

5. استراتیژی حدس و ارزیابی

در روش استراتیژی حدس و ارزیابی، اول تا حد امکان بایک حدس منطقی یک حل پیدا نموده، بعداً ارزیابی می کنیم که مسئله را صدق می کند یا خیر؟ استراتیژی حدس و ارزیابی تا حدی مساله مفکور ووسعی و غلطی است.

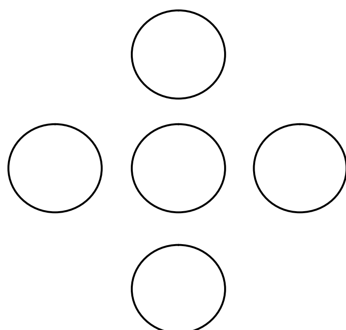
در حدس و ارزیابی ممکن حدس بسیار اتفاقی نه بلکه یک گمان مستدل و منطقی می باشد.

مثال: بین هر یک از دوایر فوق، طور اتفاقی اعدادی از 1، 2، 3،4 و 5 را بنویسید که مجموعه های عمومدی و افقی آن ها با هم مساوی باشند.

قدم اول: دریک دایره خالی، یکی از اعداد 1 تا 5 را طوری مینوسیم که یک خط افقی اش(سه خانه) و خط عمودی آن با مجموعه عین جز در نظر می گریم.

قدم دوم: اینجا طریقه بهتر اینست که حدس زده ارزیابی کنیم.

قدم سوم: حل های ممکنه انگونه خواهد بود.



	2			3			2	
1	3	5	2	1	5	1	5	4
	4			4			3	

قدم چهارم: ایا کدام طریق دیگر وجود داد؟ چند حل وجود دارد؟ اگر 2و یا 4 در وسط باشد، آیا حل ممکنه است؟

پلان پیشنهاد لکچر حل مسایل:

موضوع: ستراتیژی های حل مسایل

هدف عمومی: شاملین جهت حل مسایل، یک تعداد ستراتیژی هاغیر مروج را فهمیده و قابلیت استفاده ازآن ها را پیشنهاد می کنند.

اهداف لکچر:

- شاملین جهت حل مسایل، پروسه چهار مرحله ای را بدانند.
- در حل مسایل ستراتیژی های متنوع را به کار ببرند.
- استرتیژی را در حل مسایل برای شاگردان مفید بدانند.
- بالاخره استفاده یا معنی ریاضیکی را با اعتماد اجرا کنند.

وقت:90 دقیقه

مواد: مود موضوع و کتاب ریاضی صنف دهم به تعداد شاملین

طریقه پیشنهادی لکچر: توضیحات، در دو نفری گروپ های 5 نفری، طریقه تفکر جهر جهت حل مسایل به روش پیشنهادی.

وقت	فعالیت ترینر	فعالیت متوقعه شاملین	مواد
5	یک روز قبل از حل مسایل، مواد توزیع گردد تا بخوانند. حل مسایل یعنی چی؟ استراتیژی حل چیست		
20	ورق حل مسایل ( ) را بخوانید وبگوئید که مسئله یعنی چی؟ پروسه چهار مرحله ای پولیاری یعنی چی؟ چرا در اتدریس مهم است. جواب های ناقص اصلاح و را جع به آن ها بحث گردد.	دو دو نفر موضوع را باهم بخوانید و برای آن ها جواب تهیه کنید	مواد

15	توضیح مختصر: 1. مفهوم استراتیژی چهار مرحله ای پولیای معنی و مثال های آن. 2. استراتیژی های آن.	تشریح از روی چارت استراتیژی	تخته و تباشیر
40	استراتیژی تدریس، در مثال طریقه (تفکر جهر) بیائید، ببینید که مسئله را چگونه حل نمایم: دریک فارم، تعدادی مجموعی مرف ها و گوسفندان 24 است. اگر مجموع پاهای آن ها 64 باشد، چند گوسفند و چند مرغ در انجا وجود دارند. مرحله اول: از جمله 24 حیوان ما یک تعداد مرغ و باقی گوسفندان می باشند. اگر برای هر مرغ دو پای و برای هر گوسفند چهار پای جمعاً 64 شوند، رمزی را جستجو کنیم که بعضی مرغ ها و بعضی گوسفندان هستند. مرحله دوم: یک دفع 24 سر را به سه قطار انظیم کنیم (روی تخته بنویسید). شکل اول صـ31) که مرغان هر یک دو پای دارند؟ یعنی اگر تماماً مرغ باشند، پس مجموع پای ها آن ها 48 می شود. - اما تمام پاها باید 64 باشند،پس 16 پای $(64-48=16)$ باید مربوط گوسفندان باشد بلی! اکنون باید دریک شکل دو دو اضافه گردد یعنی 49 , 50 , 51 ... , 63و 64 پس! حالا گوسفندان را (چهار پای را بدانیم شکل دوم صـــ31. دیده می شود که تعداد گوسفندان 8 است.	- گـــوش گـــرفتن (شنیدن) -تفکر جهر ترینر - یاد داشت کردن - که چه کنیم؟ - چه می گوئید؟	

جواب درست را پیدا کردیم، اما چگونه میتوان طریق دیگری حل را طراحی کرد؟ بیائید معادله را بسازیم: مرحله اول: تعداد گوسفند و مرغان هرکدام چند باشند؟ مرحله دوم: که گوسفندان x و مرغان y باشند که مجموع آن ها 24 است. هرگوسفند 4 پای و هر مرغ دو پای جمعاً 64 پای دارند یعنی: $4x + 2y = 64$ مرحله سوم: اکنون این معادلات دو مجهوله را حل می کنیم و میابیم که $x = 8$ و $y = 16$ پس گوسفندان 8 و مرغان 16 اند. دریم قدم: اوس به نو دغه دوه دوه مجهوله معادلی حل کوم. X=8، y=16 ، پس: 8 پسونه او 16 چرگان به وی.			

ریاضی صنف دهم

شامل دروس انتخابی صنف 10 نصاب جدید تعلیمی

لکچر اول (بخش اول)

افاده های الجبری

تعریف: یک لست عناصر (در محدوده کتب مکاتب اعداد، حروف، اعداد و حروف که از اعداد نمایندگی می‌کند) که به وسیله عملیه های الجبری جمع، تفریق، ضرب، تقسیم و بلند بردن به توان یک عدد تام یا گرفتن جذور تام باهم مربوط شده باشند، به نام افادهٔ الجبری یاد می‌گردد.

حروفی‌که در یک افاده الجبری به کار می‌روند به دو نوع بوده می‌توانند. بعضی آنها می‌توانند قیمت های عددی مختلف را به خود اختیار کنند، این نوع حروف را متحولین گویند. که معمولاً به وسیله حروف آخر الفبا چون Z,Y,X,..... نمایش داده می‌شوند، بعضی حروف دیگر آنها می‌توانند فقط یک یک قیمت عددی را به خود بگیرد و حتمی نیست که آن قیمت مشخص شده باشد این نوع حروف در یک افادهٔ الجبری را پارامترها گویند و معمولاً حروف اول الفبا c,b,a,... را برای آن به کار می‌برند.

یادآوری باید کرد که پارامترها از روی مسئاله مورد بحث فهمیده میشوند، هرگاه فهمیدن آن مشکل باشد باید است به طور مشخص گفته شود. در غیر آن همه حروفی‌که در یک افادهٔ الجبری باشند متحولین خوانده خواهند شد.

مثال ها:

1- $3x^3-5xy+2y^2$, $2a^3b^5$ $\quad 4x+5+\frac{15}{t^2}$, $3x,-13,15,$ $\frac{-5xy+3z}{2a^2-c^2}$

$5\sqrt{x}$ افاده های الجبری اند.

در این افاده ها همه حروفی‌که به کار رفته است متحولین می‌باشند. در افادهٔ اول و دوم، x و y و هم a و b هر عدد حقیقی را به خود قیمت گرفته میتوانند. در افاده سوم x و t^n بدون $t=0$ هر عدد حقیقی را قیمت می‌گیرند.

در افاده هفتم a, z ,y, x و c همه اعداد حقیقی را بدون انکه $2a^2-c^2=0$ باشند قیمت گرفته میتوانند و بالاخره در افادهٔ $5\sqrt{x}$ همه اعداد حقیقی $x\geq 0$ را قیمت میگیرند.

2- $ax^2yz^3-bxy^5z\frac{1}{2}$ که در آن a و b اعداد حقیقی باشند یک افاده الجبری است مگر a و b در این افاده پارامتر ها اند.

3- $ax^2.y^3z^4\sqrt{v}$ یک افاده الجبری است که در اینجا A یک عدد حقیقی را نشان میدهد و پارا متر می‌باشد.

حد (Term): یک افادهٔ الجبری که در آن اعداد و حروف شان مشتمل بر عملیه های ضرب و تقسیم باشند و یا هم جذر گرفته شده باشد به نام حد (Term) یاد میشود. مانند $6x^2y^3$, $\frac{5x}{3y^4}$, $-3x^7$

مونوم (Monomial): یک‌افادهٔ الجبری است که تنها یک حد را در برداشته باشد. مانند:

$4x^2/y$, $3xyz^2$, $7x^3y^2$ مونوم ها اند.

بنابر همین تعریف است که مونوم ها را بعضی اوقات حد ها گویند.

دوحده یا بینوم (Binomial): یک افادۀ الجبری است که متشکل از دو حد باشد مانند:

$$2x+4y \ , \ 3x^4-4xyz$$

سه حده (Trinomial): آن افادۀ الجبری را گویند که از سه حد تشکیل شده باشد: چون

$3x^2-5x+2 \ , \ 2x+6y-3z \ , \ x^2-\frac{3xy}{z}-2x^3z^7$ سه حده ها اند.

کثیرالحده یا چندین حده (Multinomial): افاده های الجبری اند که بیش از یک حد را در بر داشته باشند؛ مانند: $7x+\frac{5x^2}{y}-\frac{3x^3}{16} \ , \ 3x^2+6x^2y-7xy+6 \ , \ 7x+6y$ چندین حده ها اند.

ضریب (Coefficient): یک فکتور یک حد را ضریب قسمت متباقی آن حد گویند؛ چنانچه در حد $5x^3y^2$، $5x^3$ ضریب y^2 یا $5y^2$ ضریب X^3 بوده و 5 ضریب x^3y^2 می‌باشد.

ضریب عددی (Numerical Coefficient): اگر یک حد حاصل ضرب یک عدد و یک یا بیشتر از یک حرف باشد، ما عدد مذکور را ضریب عددی آن حد می‌گوییم. طور مثال در $-5x^3y^2$ عدد 5- ضریب عددی این حد است. یا مختصراً آنرا ضریب این حد گویند.

حد های مشابه (Like terms): همان حد ها را با هم مشابه گویند که آنها در ضرایب عددی از هم فرق داشته باشند؛ طور مثال: $7xy$ و $-2xy$ حدهای باهم مشابه اند.

$3x^2y^4$ و $\frac{1}{2}x^2y^4$ حدهای باهم مشابه اند اما $-2a^2b^3$ و $-2a^2b^7$ باهم حدهای مشابه نمی باشند.

دو و یا چندین حد مشابه در یک افادۀ الجبری را میتوان در یک حد با هم یکجا نمائیم (از نظر الجبر باهم جمع نمایم) طور مثال $7x^2y-4x^2y+2x^2y$ مساوی به $5x^2y$ میشود.

پولینوم چندین متحوله: یک افادۀ الجبری را پولینوم چندین متحوله گویند، اگر توان های همه متحولین شامل در آن، اعداد تام مثبت یا صفر باشند.

یک پولینوم چندین متحوله می‌تواند یک حده (مونوم) یا چندین حده (پولینوم) باشد. مثلاً $f=3x^2$ یک پولینوم یک متحوله، $g=3xy+z$ یک پولینوم دو متحوله است. $h=3x^2y^3-5x^5y+2$ یک پولینوم سه متحول و در حالیکه $4\sqrt{y}+3$ و $3x+\frac{4}{x}$ پولینوم ها نمی‌باشند.

درجۀ یک مونوم: درجه یک مونوم عبارت از حاصل جمع توان های همه متحولین است که در آن مونوم شامل باشند. درجۀ ضریب عددی در یک مونوم صفر می‌باشند.

مثال ها: درجه مونوم سه متحوله $4x^3y^2z$ عبارت از 6=1+2+3 است اما درجه ضریب آن 4 ، صفر است. همچنان درجه هرکدام از اعداد ثابت چون $6 , 0 , \sqrt{3}-$ و π صفر میباشد.

یک پولینوم را متجانس گویند، اگر همه حدهای آن عین درجه را دارا باشند؛ مثلاً پولینوم $p=3x^2y+2xyz+3z^3$ یک پولینوم متجانس است در غیر آنرا غیر متجانس خوانند.

درجه یک پولینوم چندین متحوله: درجه یک پولینوم چندین متحوله عبارت از درجه همان مونوم (حد) در آن پولینوم است که در بین همه حدهای آن پولینوم را بلندترین درجه را دارا باشد؛ مثلاً درجه پولینوم $7x^3y^2-3xz^5+2x^3y$ عبارت از 6 است. زیرا حد های آن به ترتیب درجه های 5،6 و 4 را دارا است.

قیمت های عددی یک پولینوم: هرگاه به متحولین یک پولینوم قیمت های عددی داده شود (به جای متحولین وضع گردند) بعد از اجرای عملیه های مربوطهٔ آن قیمت عددی مشخص بدست می‌آید که قیمت عددی آن پولینوم یاد میگردند.

مثال قیمت عددی پولینوم $P=3x^2yz-8xyz^2$ به قیمت های $y=2, x=1$ و $z=1$ عبارت از 10- است.

- عملیه های الجبری جمع، تفریق، ضرب و تقسیم پولینوم ها را که اشکالی نخواهند داشت به خواننده‌گان محترم می‌گذاریم.

شکل عمومی یک پولینوم چندین متحوله عبارت است از:

$$f=\sum_{i_1,i_2,i_3,\dots,i_n=0}^{k_1,k_2,\dots,k_n} a_{i_1,i_2,\dots,i_n}x_1^{i_1}x_2^{i_2}\dots x_n^{i_n}$$

در حالیکه $\in\mathbb{N}, i_1,i_2,\dots,i_n\in\mathbb{N}$ $k_1,k_2,\dots,k_n$ و $a_{i_2,i_2,\dots,i_n}\in\mathbb{R}$ است که در اینجا تفصیل آنرا لازم نمی‌بینم و در کتاب درسی خوانده میتوانید.

افاده ناطق (Rational Expression): یک افادهٔ الجبری را که به شکل $\frac{p}{q}$، p و q پولینوم ها و $q\neq 0$ باشد، افاده ناطق گویند.

مثال ها: $\frac{2x^2y^3z-3xyz^3}{4x^2yz^2+7xy}$ با $4x^2yz^3+7xy\neq 0$

یا $\sqrt{3}x^2y^3z$ و 5- هرکدام یک افاده ناطق است.

هر پولینوم یک افاده ناطق می‌باشد چرا؟

افاده های غیر ناطق (Irrational Expression): یک افاده الجبری که به شکل خارج قسمت دو پولینوم نوشته شده نتواند به نام افاده های الجبری غیر ناطق خوانده میشود.

مثال ها: $\sqrt{xy}$, $\frac{1}{(x^2+5)^{\frac{1}{2}}}$, $\sqrt{x^2y^2z^3+1}$

هرکدام یک افادهٔ غیر ناطق است.

فعالیت اول گروپی: شاملین در گروپ های دو نفری وظایف ذیل را انجام دهند.

فعالیت اول: افاده‌های الجبری ذیل را به ارتباط کتگوری های مربوطهٔ آن تصنیف و مشخص سازید.

$a.\quad x^2+3y^2z$

$b.\quad 2x^2-3x+3$

$c.\quad 4x^2y/z$

$d.\quad y+3$

$e.\quad 4x^2+3z-2\sqrt{x}$

$f.\quad 5x^2+\frac{4}{y}$

$g.\quad \sqrt{x^2+y^2+z^2}$

$h.\quad \sqrt{y}+\sqrt{z}$

$i.\quad a^3+b^3+c^3-3abc$

فعالیت دوم: با در نظر داشت مبحث فوق، جدول ذیل را خانه بری نمایید.

	حد یا مونوم	بینوم	ترینوم	چندین حده	پولینوم
x^3+3y^2z					
$2x^2-5x+3$					
$4x^2y/z$					
$y+3$					
$4z^4+3z-\sqrt[2]{z}$					
$5x^2+4/y$					
$\sqrt{x^2+y^2+z^2}$					
$\sqrt{y}+\sqrt{x}$					
$a^3+b^2+c^3-3abc$					

لکچر اول (بخش دوم)

پولینوم های یک متحوله

تعریف: هرگاه در یک پولینوم تنها یک متحول به کار رفته باشد آن پولینوم را پولینوم یک متحوله گویند؛ مانند:

$f = 5x^7 - 3x^5 - 4x^6 + x^4 - x^3 + 2x^2 + 3x + 6$

$g = 2ay - 5ay^2 + 4ay^4 - 3by^3 + 3$

در پولینوم f تنها x متحول است و همه اعداد دیگر در آن ضریب های حد مربوطهٔ آن می‌باشند. در پولینوم g، تنها y متحول است a و b در آن پارامتر ها اند که حیثیت ضریب ها را دارا است و در آن 2a، -5a، 4a، -3b و 3 ضریب‌های حدود مربوطه آنها است.

شکل عمومی یک پولینوم یک متحوله عبارت است از:

$$P = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n$$

دراینجا $a_0, a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ ضریب ها بوده و x متحول آنست و $n \in \mathbb{N}$

- عدد n بزرگترین عدد طبیعی در بین توان های همه حدود این پولینوم است پس n را درجه این پولینوم گویند.
- هرگاه همه حدود این پولینوم موجود باشد، پولینوم را کامل اگر یک یا چندین حد آن موجود نباشند پولینوم را ناقص نامند.
- عدم موجودیت یک حد در یک پولینوم به معنی انست که ضریب حد مربوطه صفر است.
- اگر پولینوم f به شکل

$$f = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n$$

نوشته باشد درجه های متحولین به ترتیب زیاد شده میروند این پولینوم را به ترتیب صعودی و اگر f به شکل:

$$f = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$$

نوشته شده باشد پولینوم را به ترتیب نزولی خوانند.

- هرگاه درجه های یک پولینوم به ترتیب از کوچک تا بزرگ و یا از بزرگ تا کوچک نوشته شده باشند. پولینوم را منظم گویند در غیر آن پولینوم نا منظم خوانده میشوند.

مثال: درجهٔ پولینوم

$$f = 2 + 3x + 4x^2 - 2x^3 + 5x^2 + 6x^5$$

عبارت از 5 است. $(n = 5)$

- این پولینوم به طور صعودی تنظیم گردیده است و یک پولینوم منظم و همچنان یک پولینوم کامل می‌باشد. زیرا ضریب های درجه های 0، 1، 2، 3، 4، 5، همه خلاف صفر اند. البته x^0 همانا 2 است.

حدود پولینوم به اساس درجه از خورد تا بزرگ تنظیم گردیده اند بنا بران این پولینوم منظم می‌باشد.

- هرگاه $f = 6x^5 + 5x^4 - 2x^3 + 4x^2 + 3x + 2$ نوشته شده باشد. F در این حالت به ترتیب نزولی است.
- هرگاه $g = 6x^5 + 5x^4 + 4x^2 + 3x + 2$ باشد به معنی آنست که ضریب x^3 صفر است. این پولینوم یک پولینوم ناقص است. در حالی‌که f یک پولینوم کامل می‌باشد.
- دریافت قیمت عدد یک پولینوم یک متحوله و مجموعه ضریب آن.

هرگاه در یک پولینوم

$$P = a_0 + a_1x + a_2x_2 + ... + a_{n-1}x^{n-1} + a_nx^n$$

اگر به جای x یک قیمت عددی r وضع شود بعد از انجام عملیه های لازمه برای p یک عدد بدست می‌آید که آنرا قیمت عددی این پولینوم برای x=r گویند.

$$P(r) = a_0 + a_1r + a_2r^2 + ... + a_{n-1}r^{n-1} + a_nr^n$$

بعد از ضریب و جمع همین اعداد فقط یک عدد بدست می‌آید و آنرا قیمت عددی پولینوم p می‌باشد.

- هرگاه در عوض x در p عدد 1 وضع شود مجموع همه ضرایب پولینوم حاصل میشود.

$$P(1) = a_0 + a_1.1 + a_2.1^2 + ... + a_{n-1}.1^{n-1} + a_n.1^n$$
$$= a_0 + a_1 + a_2 + ..a_{n-1} + a_n = \sum_{i=0}^{n} a_i$$

حاصل جمع ضرایب پولینوم p است.

مثال: $p = 2x^2 - 3x^2 + 2x - 7$

را در نظر گیریم که قیمت عددی آن برای x=2 عبارت است از:

$$P(2) = 2\cdot2^2 - 3\cdot2^2 + 2\cdot2 - 7$$
$$= 2\cdot8 - 3\cdot4 + 4 - 7$$
$$= 16 - 12 + 4 - 7$$
$$= 1$$

در حالیکه مجموع ضرایب آن

$$P(1) = 2\cdot1 - 3\cdot1 + 2\cdot1 - 7$$
$$= -6$$

است.

مثال: قیمت های عددی پولینوم

$$P(x) = x^3 - 3x^2 + 2x - 1$$

را به قیمت های x=2، x=-1 و x=0 دریافت کنید.

$$P(2) = 2^3 - 3 \cdot 2^2 + 2 \cdot 2 - 1 = 8 - 12 + 4 - 1 = -1$$
$$P(-1) = (-1)^3 - 3(-1)^2 + 2(-1) - 1 = -1 - 3 - 2 - 1 = -7$$
$$P(0) = 0^3 - 3 \cdot 0^2 + 2 \cdot 0 - 1 = -1$$

پس قیمت عددی پولینوم $P(x)$ به قیمت $x = 2$ عبارت از 1- به قیمت x=-1 عبارت از 7- به قیمت x=0 مساوی به 1- است.

و مجموع ضرایب این پولینوم همانا

$$P(1) = 1 - 3 + 2 - 1 = -1$$

است.

فعالیت 4: در جدول ذیل مفاهیم فوق را تمرین نمایید.

درجه پولینوم	پولینوم غیرمنظم	پولینوم منظم	پولینوم ناقص	پولینوم کامل	پولینوم نزولی	پولینوم صعودی	
5		√		√	√		$p = 5x^2 - 6x^2 + 2x^2 - 3x + 1$
							$= -3 + 4x - 8x^3 + x^5 - 8x^6$
							$g = 2x\ 3x^2 + x^3 - 4x^4$
							$h - x^5 - 4x^4 + 2x^2 - 8$

پلان ارایه کردن لکچر اول

موضوع: افاده های الجبری و پولینوم‌ها (کتاب ریاضی صنف دهم، صفحات ....).

هدف: تصحیح، تکمیل و توضیح موضوعات و بعضی مفاهیم این درس؛ چون تعریف متحول، افاده‌های الجبری، پولینوم‌های چندین متحوله و یک متحوله و غیره. .

پلان ارایه:

این موضوع به دو بخش تقسیم گردد:

1- بخش اول:

1- آفاده های الجبری (صفحات 1 الی 6) از طرف یکی از شاملین سمینار طبق آماده‌گی قبلی از مواد مربوطه فوق برای 25 دقیقه توضیح داده می‌شود.

(وقت 20 دقیقه)

2- سپس فعالیتهای یک، دو و سه را در گروپها اجرا مینمایند

(وقت 20 دقیقه)

3- بالاخره برای 5 دقیقه دیگر از جانب ترینر نتیجه‌گیری میشود و در صورت ضرورت توضیحات لازم اضافی داده میشود.

2- **بخش دوم** (**پولینوم های یک متحوله**)

1. مانند بخش اول از طرف یکی از شاملین سمینار طبق آماده‌گی قبلی 20 برای دقیقه محتوی صفحات 8 و 9 توضیح داده میشود، بشمول اجرای فعالیت 4 در متن؛

(وقت 20 دقیقه)

2. بعداً از شاملین خواسته میشود که در گروپهای 4 نفری مسایل بحث شده فوق را با محتوی کتاب درسی مقایسه کنند. تفاوتها و ابهامات را بیرون نویس کرده و بحث نمایند. در صورت ضرورت ترینر و شاملین یکجا توضیحات لازم ارایه دارند و مثالها از کتاب صنف دهم انتخاب و کار شود.

(وقت 20 دقیقه)

3. بعد برای 5 دقیقه از طرف ترینر نتیجه‌گیری میشود.

نوت: در جریان ارایه کردن همه موضوعات درهر حال باید سعی شود که در صورت امکان مثالهای بیرون از کتب درسی، مانند مثالهای از زندگی روزمره و مسایل ریاضی داده و بحث شود تا بدین وسیله مفهوم و درک اساسی مفاهیم ریاضی واستفاده عملی از آن خوبتر شود. (مثالهای داده شده را ببینید).

لکچر دوم (بخش اول)

قضیه باقی مانده، قضیه فکتور و تقسیم ترکیبی

فعالیت های مقدماتی:

اگر $P(x)=4x^5-3x^2+x+2$ و $Q(x)=3x^3-5x-5x+1$ باشد.

در این صورت $P=(1)=?$ و $Q_{(-1)}=?$ را محاسبه نمائید.

$$P(1)=4(1)^2-3(1)^2+(1)+2=4-3+1+2=4$$

$$P(-1)=3(-1)^3-5(-1)+1=-3+5+1=3$$

مثال اول: پولینوم $P_{(x)}=2x^2+3x+4$ را برای بینوم $Q_{(x)}=x+3$ تقسیم نمائید.

مقسوم علیه: $x+3$ — خارج قسمت: $2x-3$ — مقسوم: $2x^2+3x+4$

$$\begin{array}{l} 2x^2+3x+4 \\ -2x^3 \pm 6x \\ \hline \quad -3x+4 \\ \quad \mp 3x \pm 9 \\ \hline \quad\quad 13 \end{array}$$

باقی مانده: 13

مثال دوم: پولینوم $P(x)=x^3+2x^2-3x-4$ $P(x)=x^3+2x^2 3x-4$ را بربینوم $Q(x)=x-2$ تقسیم نمائید.

مقسوم علیه: $x-2$ — خارج قسمت: x^2+4x+5 — مقسوم: x^3+2x^2-3x-4

$$\begin{array}{l} x^3+2x^2-3x-4 \\ \pm x^3 \mp 2x^2 \\ \hline \quad 4x^2-3x \\ \quad -4x^2 \mp 8x \\ \hline \quad\quad 5x-4 \\ \quad\quad -5x \mp 10 \\ \hline \quad\quad\quad 6 \end{array}$$

باقی مانده: 6

قضیه باقی ماند: اگر پولینوم $P(x)$ را بر بینوم $(x-a)$ تقسیم نمائیم باقی مانده $R=P(a)$ می‌باشد.

ثبوت: فرض نمائیم که در نتیجه تقسیم $P(x)$ بالای بینوم $(x-a)$ پولینوم $Q(x)$ بحیث خارج قسمت و عدد R بحیث باقی مانده بدست آمده باشد، پس نوشته کرده می‌توانیم.

$$P(x)=(x-a).Q(x)+R$$

باقی مانده+ (خارج قسمت). (مقسوم علیه)= مقسوم

هرگاه عوض x در پولینوم عدد a را وضع نمائیم داریم.

$P(a)=(a-a).Q(a)+R$

$P(a)=0.Q(a)+R$

$P(a)=0+R$

$P(a)=R$

مثال سوم: اگر پولینوم $P(x)=2x^2+3x+4$ را بر بینوم $Q(x)=x+3$ تقسیم نمائیم باقی مانده چند خواهد بود؟

حل: میدانیم که $x+3=0$

$x=-3$

$P(x)=2x^2+3x+4$

$P(-3)=2(-3)^2+3(-3)+4$

$P(-3)=18-9+4$

$P(-3)=13$

$R=13$

در مثال اول توسط عملیه تقسیم باقی مانده نیز عدد 13 بود.

مثال چهارم: اگر پولینوم $P(x)=x^3+2x^2-3x-4$ را بینوم $Q(x)=x-2$ تقسیم نمائید باقی مانده چند خواهد بود؟

حل: $x-2=0$ پس $x=2$

$P(x)=x^3+2x^2-3x-4$

$P(2)=(2)^3+2(2)^2-3(2)-4$

$P(2)=8+-6-4$

$P(2)=16-10$

$P(2)=6$

$R=6$

در مثال دوم توسط عملیه تقسیم باقی مانده نیز عدد 6 بود.

مثال پنجم: اگر پولینوم $P(x)=5x^2+x-9$ بر $x+\frac{1}{2}$ تقسیم شود بدون عملیه تقسیم نشان دهید که باقی مانده چند خواهد بود؟

حل:

$$x+\frac{1}{2}=o$$
$$x=-\frac{1}{2}$$

$$P(x)=5x^2+x-9$$
$$P(-\frac{1}{2})=5(-\frac{1}{2})^2-\frac{1}{2}-9$$
$$P(-\frac{1}{2})=5(\frac{1}{4})-\frac{1}{2}-9=4$$
$$P(-\frac{1}{2})=\frac{5}{4}-\frac{1}{2}-9=\frac{5-8-36}{4}=\frac{-33}{4}=-\frac{33}{4}$$
$$R=-\frac{33}{4}$$

مثال ششم: اگر پولینوم $P(y)=10y^3+7y^2-y-11$ را بر بینوم $Q(y)=(2y+1)$ تقسیم شود باقی مانده را بدون انجام دادن عملیه تقسیم بدست آورید.

حل:

$$2y+1=0$$
$$2y=-1$$
$$y=-\frac{1}{2}$$

$$P(y)=10y^3+7y^2-y-11$$
$$P(-\frac{1}{2})=10(-\frac{1}{2})^3+7(-\frac{1}{2})^2-(-\frac{1}{2})-11$$
$$P(-\frac{1}{2})=10(-\frac{1}{8})+7(\frac{1}{4})+\frac{1}{2}-11$$
$$P(-\frac{1}{2})=-\frac{10}{8}+\frac{7}{4}+\frac{1}{2}-11$$
$$P(-\frac{1}{2})=-\frac{5}{4}+\frac{7}{4}+\frac{1}{2}-11$$
$$P(-\frac{1}{2})=\frac{-5+7+2-44}{4}=\frac{-40}{4}=-10$$

اگر یک پولینوم $P(x)$ بر بینوم $(x-a)$ یا $(x+a)$ تقسیم گردد، جهت دریافت باقی مانده این تقسیم بر خلاف اشاره عدد ثابت a مقسوم علیه، پولینوم مقسوم را قیمت گذاری نموده که بدین طریقه بدون عملیه تقسیم می‌توان باقی مانده R را دریافت نمود.

قضیه فکتور: اگر در پولینوم $P(x)$ $P(a)=0$, شود، پس $x-a$ یک فکتور این پولینوم می‌باشد.

ثبوت: در قضیه باقی مانده بیان شد که از تقسیم یک پولینوم $P(x)$ بر بینوم $(x-a)$ حاصل می‌شود.

$P(x)=(x-a).Q(x)+R$

در صورت که $Q(x)$ پولینوم خارج قسمت بوده و درجه آن از درجه $P(x)$ یکی کم است و R هم باقی مانده تقسیم می‌باشد.

حال اگر $R=P(a)=0$ شود مساوات فوق شکل ذیل را حاصل می‌نماید.

$P(x)=(x-a)Q(x)$

از اینجا نتیجه می‌شود که $(x-a)$ یک عامل ضربی $P(x)$ است؛ چون

$P(x)=(a-a).Q(x)=0$

می‌شود. پس، گفته می‌توانیم که a یک جذر یا یک نقطه صفری پولینوم $P(x)$ است. یعنی اگر $(x-a)$ یک فکتور پولینوم $P(x)$ باشد، پس $P(a)=0$ است و عدد a یک جذر معادله پولینومی $P(a)=0$ می‌باشد.

نتیجه: هرگاه $P(x)$ یک پولینوم باشد و برای $x=a$, $P(a)=0$ شود میگوییم که $P(x)$ بالای $x-a$ قابل تقسیم است و یا $x-a$ یک فکتور $P(x)$ را تشکیل میدهد.

مثال هفتم: نشان دهید که $(x-2)$ یک فکتور پولینوم $P(x)=x^3+3x^2+4x+28$ می‌باشد.

حل: $x-2=0$

$x=2$

$$P(x)=x^3+3x^2+4x-28$$
$$P(2)=(2)^3+3(2)^2+4(2)-28$$
$$P(2)=8+12+8-28=0$$
$$R=0$$

چون $R=0$ شد، پس $x-2$ یک فکتور پولینوم است.

مثال هشتم: به کدام قیمت K بینوم $(x-1)$ یک فکتور پولینوم $P(x)=2x^4-3x^3-x-2k$ می‌باشد.

حل: $x-1=0$

$x=1$

$$P(1)=2(1)^4-3(1)^3-(1)-2k$$
$$P(1)=2-3-1-2k=-2-2k$$
$$P(1)=R=-2-2k$$

اگر $R=0$ باشد، بنابر آن $-2k-2=0$

$-2k=2$

$K=-1$

به قیمت $k=-1$ باقی مانده صفر می‌شود، در نتیجه $x-1$ یک فکتور این پولینوم می‌باشد.

مثال: به کدام قیمت k عدد 3 یک جذر معادله $2x^4-6x^3-7x^2+kx-15=0$ می‌باشد.

حل:

$$2x^4-6x^3-7x^2+kx-15=2(3)^4-6(3)^3-7(3)^2+3k-15=0$$
$$2(81)-6(27)-7(9)+3k-15=0$$
$$162-162-63+3k-15=0$$
$$3k=63+15=78$$
$$k=26$$

اگر $x=a$ یک فکتور پولینوم $P(x)$ باشد، پس $P(a)=0$ است و اگر در پولینوم $P(x)$، $P(a)=0$ شود $(x-a)$ یک فکتور پولینوم $P(x)$ می‌باشد.

تقسیم ترکیبی (Synthetic Division): برای تقسیم نمودن پولینوم $P(x)$ بالای بینوم $(x-a)$ تقسیم ترکیبی یک طریقه کوتاه می‌باشد که به طور عموم برای اهداف ذیل از آن کار گرفته می‌شود.

1- یافتن قیمت پولینوم برای قیمت های مختلف x
2- برای یافتن جذر ناطق معادله $P(x)=0$
3- برای تجزیه افاده های الجبری

مثال اول: پولینوم $P(x)=x^3+2x^2-3x-4$ را بالای $(x-2)$ توسط عملیه تقسیم ترکیبی، تقسیم نموده، خارج قسمت و باقی مانده را تعیین نمایید.

حل: ضرایب پولینوم مقسوم را در یک سطر به شکل پولینوم کامل منظم از چپ به راست نظر به توان به طور نزولی ترتیب می‌دهیم و به طرف راست آن قیمت a را که 2 است می‌نویسیم.

سطر اول ←	1	2	-3	-4	2
سطر دوم ←		2	8	10	
سطر سوم ←	1	4	5	[6] → باقی مانده	

ضرایب پولینوم خارج قسمت (1، 4، 5)

تحت ضرایب پولینوم مقسوم یک سطر را خالی گذاشته زیر آن خط می‌کشیم (مانند جدول بالا) 1 را از خط پائین آورده در 2 که قیمت a است ضرب می‌نمائیم و حاصل ضرب را زیر 2 می‌نویسیم حاصل جمع این دو عدد را هم پائین خط می‌نویسیم. این عدد را که 4 است در 2 ضرب نموده زیر عدد 3- نوشته و با آن جمع می‌کنیم این حاصل جمع، 5 را ضرب 2 نموده زیر 4- نوشته می‌کنیم حاصل جمع 4- و 10 را بدست آورده زیر خط می‌نویسیم در نتیجه اعداد 6، 5، 4، 1 حاصل می‌شود سه عدد طرف چپ ضرایب پولینوم خارج قسمت را تشکیل میدهند و یک عدد طرف راست باقیمانده را نشان میدهد باید متوجه بود که پولینوم خارج قسمت با اندازه یک از درجه پولینوم مقسوم کم است در نتیجه خارج قسمت $Q(x)=x^2+4x+5$ و باقی مانده $P(2)=R=6$ است.

مثال دوم: توسط تقسیم ترکیبی خارج قسمت و باقی مانده سوال ذیل را دریافت نمائید.

$(4x^4 - 5x^2 + 2x - 3) \div (x - 2)$

به یاد داشته باشید عوض ضریب های حدود که وجود ندارد صفر می‌نویسیم یا به عبارت دیگر پولینوم مکمل به طور نزولی به طرف راست ترتیب می‌دهیم.

4	0	−5	2	−3	2
	8	16	22	48	
4	8	11	24	45	

خارج قسمت $Q(x) = 4x^3 + 8x^2 + 11x + 24$ و باقی مانده $P(2) = R = 6$ است.

مثال سوم: عملیه تقسیم ترکیبی را در سوال ذیل اجرا نمائید.

$4x^4 + 12x^3 - 21x^2 - 65x + 9 \div (2x - 1) = ?$

حل: در اینجا باید مقسوم علیه به شکل $(x - a)$ آورده شود تا بتوانیم تقسیم ترکیبی را اجرا نمائیم؛ چون:

$(2x - 1) = 2(x \frac{1}{2})$است. پس عملیه ذیل را انجام میدهیم.

$$4x^4 + 12x^3 - 21x^2 - 65x + 9 \div 2(x - \frac{1}{2}) = ?$$

4	12	−12	−65	9	1/2
	2	7	−7	−36	
4	14	−14	−72	−27	

$$4x^4 + 12x^3 - 21x^2 - 65x + 9 =$$
$$(4x^3 + 14x^2 - 14x - 72)(x - \frac{1}{2}) - 27$$
$$= (4x^3 + 14x^2 - 14x - 72) \cdot \frac{1}{2}(2x - 1) - 27$$
$$= (2x^3 + 7x^2 - 7x - 36)(2x - 1) - 27$$

از رابطه فوق نتیجه میشود که پولینوم خارج قسمت عبارت است از:

$$Q(x) = 2x^3 + 7x^2 - 7x - 36$$

بوده و باقی مانده عبارت از:

$$P(\frac{1}{2}) = R = -27$$

است.

مثال چهارم: توسط تقسیم خارج قسمت و باقی مانده سوال ذیل را دریافت نمایید.

$$2x^3 - 7x^2 - 2x + 14 \div (2x - 3) = ?$$

حل:

$$2x - 3 = 2(x - \frac{3}{2}) = 0$$

$$x - \frac{3}{2} = 0$$

$$x = \frac{3}{2}$$

بنابران مقسوم علیه شکل $x - a$ را حاصل نمود و عملیه تقسیم ترکیبی را انجام میدهیم.

2	−7	−2	14	$\frac{3}{2}$
	3	−6	−12	
2	−4	−8	−2	

$$2x^3 - 7x^2 - 2x + 14 = (2x^2 - 4x - 8)(x - \frac{3}{2}) + 2$$

$$= (2x^2 - 4x - 8)\frac{1}{2}(2x - 8) + 2$$

$$= (x^2 - 2x - 4)(2x - 3) + 2$$

در نتیجه پولینوم خارج قسمت $Q(x) = x^2 - 2x - 4$ و باقی مانده $P(\frac{3}{2}) = R = 2$ است.

توسط عملیه تقسیم ترکیبی میتوان فکتور، قیمت یک پولینوم و جذر و معادله پولینومی را محاسبه نمود.

مثال پنجم: توسط تقسیم ترکیبی نشان دهید که $(x-1)$ یک فکتور پولینوم $P(x) = 2x^4 - x^3 - x^2 + x - 1$ میباشد.

حل:

$$\begin{array}{ccccc|l} 2 & -1 & -1 & 1 & -1 & \underline{1} \\ & 2 & 1 & 0 & 1 & \\ \hline 2 & 1 & 0 & 1 & 0 & \end{array}$$

چون R=0 است پس (x-1) یک فکتور این پولینوم است.

$$2x^4 - x^3 - x^2 + x - 1 = (x-1)(2x^3 + x^2 + 1)$$

مثال ششم: قیمت پولینوم $P(x) = 3x^3 - 12x^2 + 25 + 5x$ را برای $x-2$ توسط تقسیم ترکیبی دریافت نمائید.

حل: پولینوم $P(x)$ را به طوری نزولی ترتیب می‌دهیم.

$$P(x) = 3x^3 - 12x^2 + 5x + 25$$

$$\begin{array}{cccc|l} 3 & -12 & 5 & 25 & \underline{2} \\ & 6 & -12 & -14 & \\ \hline 3 & -6 & -7 & 11 & \end{array}$$

در نتیجه $P(z) = 11$

مثال: اگر عدد (1) جذر معادله $x^3 + 4x$ باشد جذور دیگر معادله را توسط تقسیم ترکیبی محاسبه نمائید.

توسط تقسیم ترکیبی محاسبه نمائید.

حل:

$$\begin{array}{cccc|l} 1 & 4 & 1 & -6 & \underline{1} \\ & 1 & 6 & 6 & \\ \hline 1 & 5 & 7 & 0 & \end{array}$$

خارج قسمت $Q(x) = x^2 + 5x + 6$ است و

$$x^2 + 5x - 6 = (x+2)(x+3) = 0$$
$$x = -2, x - 3$$

در نتیجه جذرهای دیگر معادله 2- و 3- است.

پلان ارایه کردن لکچر دوم

موضوع: قضیه باقی مانده، قضیه فکتور و تقسیم ترکیبی (کتاب ریاضی صنف دهم صفحات .....).

هدف: تصحیح، تکمیل و توضیح موضوعات و بعضی مفاهیم این درس؛ تعریفات، عملیه ها و توضیح مسـایل در مثالهـا؛ توضیح این مسایل در کتاب درسی.

پلان ارایه:

این موضوع به دو بخش تقسیم گردد:

1. بخش اول: قضیه باقی مانده و قضیه فکتور.

1. یک تن از شاملین سمینار توظیف شده به همکاری ترینر و آماده‌گی قبلی فعالیت مقدماتی (در آغاز متن) را توضیح دارد. مثال اول و دوهم را حل کند.

2. تعریف قضیه باقی مانده را با ثبوت آن ارایه و توضیح نماید.

3. دو مثال سوم و چهارم را خودش توضیح نماید. مثالهای 5 و شش را توسط شاملین حل و توضیح نماید.

4. تعریف قضیه فکتور را با ثبوت آن ارایه و توضیح نماید.

5. مثال هفتم را خودش و مثال هشتم را توسط یکی از شاملین حل و توضیح نماید.

(وقت 20 دقیقه)

6. در گروپهای دو نفری موضوعات بحث شده فوق را در کتاب درسی جدید ریاضی صنف دهم بخوانند. تفاوتها را دریافت کرده و ابهامات باقی مانده خود را بیرون نویس کنند.

(وقت 15 دقیقه).

7. در اخر ترینر بر مسایل دریافت شده در گروپهای دو نفری شاملین روشنی انداخته توضیح نماید**.**

(وقت 10 دقیقه).

2. بخش دوم: تقسیم ترکیبی

1. یک تن از شاملین توظیف شده به همکاری ترینر تعریف و توضیح موضوع تقسیم ترکیبی را ارایه دارد.

2. در مثالهای اول و دوم انرا توضیح نماید.

مثالهای 3- 6 را توسط شاملین حل و توضیح نماید.

(وقت 20 دقیقه)

3. در گروپهای دو نفری موضوعات بحث شده فوق را در کتاب درسی جدید ریاضی صنف دهم بخوانند. تفاوتها را دریافت کرده و ابهامات باقی مانده خود را بیرون نویس کنند.

(15 دقیقه).

4. در اخر ترینر بر مسایل دریافت شده در گروپهای دو نفری شاملین روشنی انداخته توضیح نماید. بالاخره ترینر نتیجه گیری درس پیش نماید.

(وقت 10 دقیقه).

لکچر سوم

حاصل ضرب کارتزین دو ست

هدف: تصحیح، تکمیل و توضیح مطالب مربوطه این بحث در کتاب درسی در نظر است.

حاصل ضرب کارتزین دو ست:

جوره‌های مرتب: فرض کنیم A ست متعلمین صنف دهم لیسه عالی نادریه و B ست متعلمین صنف یازدهم آن لیسه باشند. می‌توان یک شاگرد صنف دهم را با یک شاگرد صنف یازدهم جوره ساخت طوری‌که اگر a یک شاگرد صنف دهم و b هم یک شاگرد صنف یازدهم باشد آنرا (a,b) می‌نویسیم. (a,b)را جوره مرتب گویند. در اینجا a را عنصر اول یا مرکبه اول و b را عنصر دوم یا مرکبه دوم این جوره مرتب خوانند. به همین ترتیب می‌توان جوره‌های متعددی را از این دو صنف تشکیل دهیم.

در جوره‌های مرتب یک اکسیوم (اصول) وجود دارد و آن این‌که دو جوره مرتب (a,b) و (a',b') باهم مساوی اند. یعنی $(a,b)=(a',b')$ اگر و تنها اگر $a=a'$ و $b=b'$ باشد. ما به صورت عموم در پروگرام مکاتب با ست‌های اعداد سر و کار داریم از ینرو از ست‌های اعداد مثال می‌آوریم. فرض کنیم $A=\{1,2\}$ ، $B=\left\{\frac{1}{2},\frac{3}{4}\right\}$ باشند.

در آن صورت $(1,\frac{3}{4}),(1,\frac{1}{2})$, $(2,\frac{1}{2}),(2,\frac{3}{2})$ هرکدام شان یک جورهٔ مرتب است.

هرگاه $(n-1,y+3)(2,4)$ دو جوره مرتب و $(n-1,y+3)=(2,4)$ باشند؛ پس $x-1=2\Rightarrow x=3$ و $y+3=4\Rightarrow y=1$ است.

حاصل ضرب کارتزین دو ست:

اگر ست های $A=\{1,2\}$ و $B=\left\{\frac{1}{2},\frac{3}{4}\right\}$ را در نظر گیریم. حاصل ضرب کارتزین A و B را در ذریعه $A\times B$ یا $A\Pi B$ نمایش میدهند و عبارت از ست همه جوره‌های مرتب عناصر A و B است که در آن مرکبهٔ اول آن عنصر A و مرکبه دوم آن عنصر B باشد.

$$A\times B=\{(n,y)/n\in A\wedge y\in B\}$$
$$=\left\{(1,\frac{1}{2}),(1,\frac{3}{4}),(2,\frac{1}{2}),(2,\frac{3}{4})\right\}$$

دیده میشود که A دارای 2 عنصر و B نیز دارای 2 عنصر بوده از آن $A\times B$ دارای $2+2=4$ عنصر است.

تعریف: فرض کنیم A و B دوست اند. ست همه جوره‌های مرتب A و B را به نام حاصل ضرب کارتزین A و B خوانند.

$A \times B = \{(a,b) \mid a \in A \wedge b \in B\}$

هرگاه A یک ست باشد، میتوان حاصل ضرب کارتزین $A \times A$ را تشکیل داد.

$A \times A = \{(a,b) \mid a,b \in A\}$

یاد آور باید شد که $a=b$ نیز بوده میتواند.

طور مثال: اگر $A=\{1\ ,\ 2\}$ باشد. انگاه

$A \times A = \{1,2\} \times \{1,2\} = \{(1,1),(1,2),(2,1),(2,2)\}$

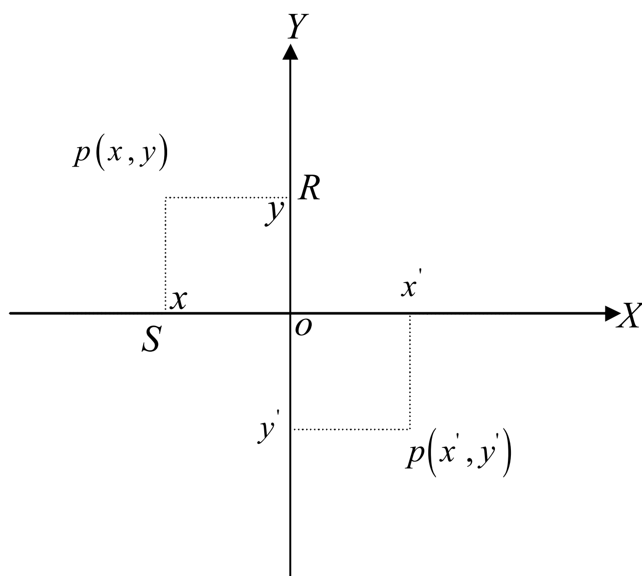
مثال: ست اعداد حقیقی IR را در نظر گریم در این صورت

$IR \times IR = \{(x,y) \mid x \in IR \wedge y \in IR\}$

این ست متشکل از همه جوره‌های مرتب ممکنه است که هر دو عنصر آن اعداد حقیقی اند.

این حاصل ضرب کارتزین یک تعبیر هندسی دارد. طوری‌که اگر در یک مستوی دو خط مستقیم جهت‌دار (محورهای) عمود باهم را در نظر گیریم که در یک نقطه (0) باهم قطع کرده باشند این دو خط جهت دار هریکی خط نمایش اعداد حقیقی است. اگر طور معمول خط افقی را محور x و خط عمودی را محور y نام می‌گذارند. نقطه تقاطع آنها از صفر هرکدام از این محورها نماینده‌گی میکند با استفاده از واحد طول به طرف راست و بالای این محورها اعداد حقیقی مثبت و به طرف چپ و پائین آن اعداد حقیقی منفی را مشخص میسازند. فاصله‌ها به واحد های معین طول از نقطه تقاطع آنها از اعداد تام نماینده‌گی میکند. در حالی‌که نقطه تقاطع آنها را مبدا خوانده و از جوره $(0,0)$ نمایندگی میکند و نقاط بین اعداد تام نمایانگر اعداد حقیقی دیگر می‌باشند.

حال اگر یک نقطه P مستوی را داشته باشیم از نقطه P یک مستقیم را موازی با محور y



و یک مستقیم را موازی با محور x رسم میکنم که محورهای x و y را باالترتیب در نقاط S و R قطع نمایند، مگر S با یک عدد حقیقی x و R با یک عدد حقیقی y سر می‌خورد که به طور یکجائی نقطه P با جورۀ مرتب اعداد حقیقی (x,y) تقابل میکند. باالعکس اگر یک عدد حقیقی x' را روی محور x و یک عدد حقیقی y' را روی محور y مشخص سازیم از x' یک موازی را با محور y و از y' یک موازی را با محور x رسم کنیم آنها یکدیگر را در یک نقطه

مانند p' مستوی قطع میکنند. دراین صورت با جورهٔ مرتب اعداد حقیقی (x', y') یک نقطه p' در مستوی مشخص می‌گردد.

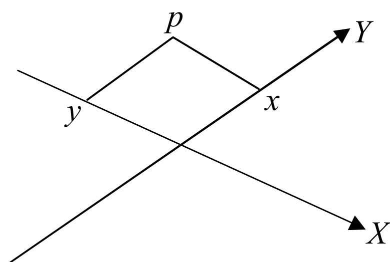
بدین ترتیب هر نقطه این مستوی با یک جورهٔ مرتب اعداد حقیقی و هر جورهٔ مرتب اعداد حقیقی با یک نقطه این مستوی تقابل میکند. بنابران یک تقابل یک به یک بین نقاط مستوی و جوره‌های مرتب اعداد حقیقی وجود دارد.

یادداشت باید کرد که اگر Q یک نقطه دیگری درین مستوی باشد که با جورهٔ مرتب اعداد حقیقی (x_1, y_1) تقابل نماید در آن صورت $P = Q$ است، و تنها اگر $(x , y) = (x_1 , y_1)$ و از آن $x = x_1$ و $y = y_1$ باشند.

هرگاه یک نقطه P با جوره اعداد حقیقی (x, y) تقابل نماید این جورهٔ مرتب را مختصات نقطه P در همین مستوی گویند و همه این سیستم را سیستم مختصات (درین حالت خاص سیستم مختصات قایم) نامند. به این اساس بین ست نقاط یک مستوی و ست جوره‌های مرتب اعداد حقیقی $IR^2 = IR \times IR = \{(x, y) | x, y \in IR\}$ یک تقابل یک به یک وجود دارد.

این مطلب را برای اولین بار یک ریاضی‌دان قرن پانزده (Descates) تقدیم کرده است از آنرو آن را به نام‌اش (سیستم مختصات کارتزین) یاد می‌کنند.

تبصره: محورها حتمی نیست که باهم قایم باشند و قایم بودن محورها یک حالت خاص انست اما جهت آسانی کار آنرا باهم قایم در نظر می‌گیرند.

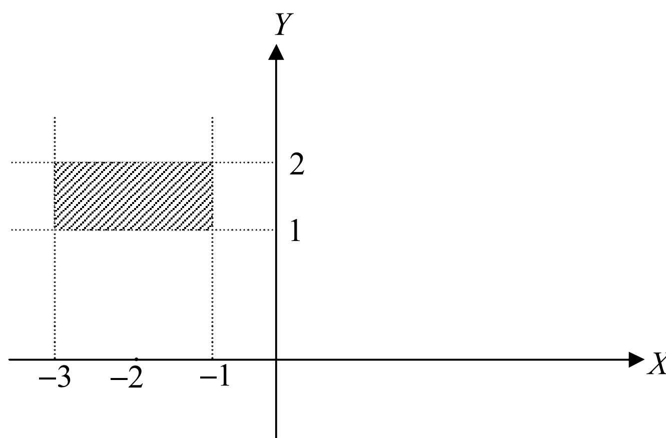


مثال

1) فرض کنیم $A = \{(x, 0) | x \in IR\}$ این ست همه نقاط محو x را نشان میدهد.
2) $B = \{(0, y) | y \in IR\}$ این قسمت همه نقاط بالای محور y را نشان میدهد.
3) فرض کنیم $A = \{x \in IR | -3 \le x \le -1\}$ و $B = \{y \in IR | 1 \le x \le 2\}$ باشد آنگاه

$$A \times B = \{(x, y) \in IRxIR | -3 \le x \le -1 \wedge 2 \le y \le 3\}$$

و در مستوی



لکچر چهارم

رابطه دوگانه و رابطه معادلت در آن

هدف: رابطه دوگانه به طور دقیق آن تعریف گردیده است. مفاهیم لازم در آن به شکل تصحیح شده، تکمیل و توضیح شده ارایه گردیده است. رابطه معادلت هم به طوری عملی آن تعریف شده است.

شکل ارایه: این مطلب بین دو شاملین سیمینار تقسیم میشود هرکدام برای 20 دقیقه توضیحات و تشریحات میدهد. به تعقیب ان 15 دقیقه بعدی هرکدام مناقشه و دیالوگ صورت می‌گیرد و در 10 دقیقه بعد اردیالوگ هر لکچر ارزیابی و نتیجه‌گیری میشود که توسط ترینر صورت می‌گیرد.

رابطه دوگانه

ست‌های {x متعلم صنف دهم لیسه عالی نادریه|A={x و {yمتعلم صنف یازدهم لیسه عالی نادریه|B={y مثال قبلی را در نظر گیریم. حاصل ضرب کارتزین این دوست عبارت است از:

$A\times B=\{(x,y)\,|\,x\in A\wedge y\in B\}$

از بین عناصر $A\times B$ همان جوره‌ها را میکنیم که در آن x و y هم سن باشند.

$G=\{(x,y)\in A\times B/$ هم سن y است $x\}$ این هم سن بودن در حقیقت یک رابطه در بین ست‌های A و B است. هرگاه این رابطه را R بنامیم در آن صورت برای یک عنصر $(x,y)\in G$ می‌نویسیم که xRy یعنی x هم سن y است یا در بین x و y رابطه R وجود دارد.

یادداشت میکینم که اگر بگویم $(x,y)\in G$ یا بگویم xRy هر دو عین مطلب را ارائه میکند. ما رابطه R را به تنهایی خود نمی‌نویسیم بلکه رابطه R در حقیقت یک سه تایی $R=\left(A,G,B\right)$ است این مطلب را به صورت عموم چنین تعریف می‌نمایم.

تعریف: قبول کنیم A و B دو ست بوده و $A\times B$ حاصل ضرب کارتزین آن باشد. سه تائی $R=\left(A,G,B\right)$ را در حالیکه $G\subseteq A\times B$ (G یک ست فرعی حاصل ضرب کارتزین A و B است)، به نام رابطه بین ست‌های A و B یاد میکنند.

A را دومین قلمرو یا ساحه تعریف $\left(Domain\right)$ رابطه R و B را کودمین (ساحه تصاویر) $Co-Domain$ رابطه R و G را گراف رابطه R گویند.

یا میگویم که R یک رابطه است از A به B که گراف آن G می‌باشد. در صورتی‌که $A=B$ باشد آنگاه $R=\left(A,G,A\right)$ یک رابطه درست A است که مختصراً آنرا $R=\left(A,G\right)$ می‌نویسند و انرا رابطه بین ست A خوانند. یا گویند که R یک رابطه است از A به A که گراف آن $G\subseteq A\times A=A^2$ است. چون رابطه R بین دو عنصر A میباشد از آنرو آنرا رابطه دوگانه یا $\left(Binary\,\mathrm{Re}lation\right)$ گویند. هرگاه $(a,b)\in G$ باشند آنگاه a را

در رابطه R با b خوانند و یا گویند که a و b باهم در رابطه R اند که اکثر آنرا aRb می‌نویسند. بنابران

$$aRb \Leftrightarrow (a,b) \in G$$

و اگر $(a,b) \notin G$ در آن صورت می‌گویند که a در رابطه R با b نیست که آنرا $a\not{R}b$ می‌نویسند.

تبصره: چون برای هر رابطه بین ست‌های A و B یک گراف G موجود می‌باشد و هرگراف $G \subseteq A \times B$ یک رابطه را تعریف می‌کند. از آنرو گفته میشود که بین ست رابطه های R در ست‌های A و B و ست طاقتهای حاصل ضرب کارتزین $A \times B$ یعنی $P(A \times B)$ (ست، ست‌های فرعی $A \times B$) یک تقابل یک به یک وجود دارد. از روی این تبصره یک رابطه R از ست A به ست B کاملاً تعریف شده است، اگر گراف آن G داده شده باشد. بنابران همین دلیل است که بعضی ریاضیدان‌ها، همان گراف G مربوط یک رابطه R را، رابطه خوانند. و می‌گویند که یک ست فرعی حاصل ضرب کارتزین $A \times B$ یک رابطه بین ست‌های A و B است.

اگر یک ست A متناهی بوده و به تعداد n عنصر را دارا است باشد در آن صورت $A \times A$ به تعداد $n \cdot n = n^2$ عنصر را دارا است. بنابران $P(A \times A)$ به تعداد 2^{n^2} عنصر را دارا میباشد. به عبارت دیگر $A \times A$ به تعداد 2^{n^2}ست‌های فرعی را دارا است، بدین ترتیب در A به تعداد 2^{n^2} رابطه وجود دارد.

(ثبوت این قضیه به (باور سید قیوم شاه، ریاضی اساسات، چاپ مطبوعه نعمانی، 1389 مراجعه شود)

مثال ها:

1) فرض کنیم $A = \{1,2,3,4\}$ و $G = \{(a,b) \in A \times A \mid a < b\}$ یا $G = \{(1,2),(1,3),(1,4),(2,3),(2,4),(3,4)\}$ باشد، پس $R = (A,G)$ یک رابطه در A است. در اینجا ست $\{1,2,3\}$ که مرکبه های اول جوره‌ها را در G تشکیل میدهد به نام ناحیه تعریف رابطه R و ست $\{2,3,4\}$ که از مرکبه‌های دوم عناصر G بدست می‌آید به نام تصویر مستقیم $\mathrm{Im}(R)$ یا $Range$ رابطه R یاد میشود.

2) ست اعداد طبیعی N را در نظر گیریم فرض کنیم $G = \{(a,b) \in \mathbb{N} x\, \mathbb{N} \mid a/b$ عدد a را تقسیم میکند b$\}$ پس

$$G = \{(1,1),(1,2),(1,3),...,(2,2),(2,4),(2,6),....(3,3),(3,6),(3,9),... \\ (4,4),(4,8),(4,12),...\}$$

دیده میشود که $...(3,5),(3,4)...,(2,5),(2,3)$ عناصر G نمی‌باشند. پس $R = (\mathbb{N},G)$ یک رابطه در $\mathbb{N}$ است.

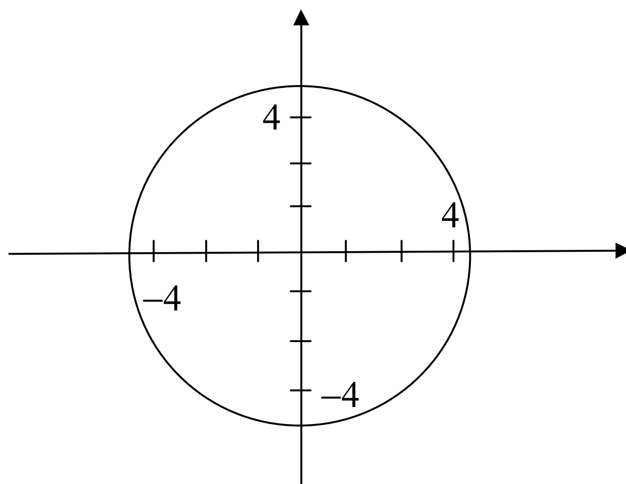
در این مثال ناحیه تعریف هم $\mathbb{N}$ و ناحیه قیمت ها نیز $\mathbb{N}$ می باشند.

3) ست اعداد حقیقی IR را در نظر گیریم. فرض کنیم.

$$G = \{(x,y) \in IR \times IR \mid x^2 + y^2 = 16\}$$

در این صورت $R = (IR,G)$ یک رابطه در IR است.

گراف این رابطه یک دایره است به مرکز مبدا مختصات و شعاع 4 واحد.



تعریف: فرض کنیم A و B دو ست بوده $R=\left(A,G,B\right)$
یک رابطه دوگانه و $G\subseteq A\times B$ گراف آن باشد. فرض کنیم $A^{'}\subseteq A$
درینصورت $R(A)=\{y\in B\,|\,\exists x\in A^{'}:(x,y)\in G\}$ را به نام تصویر مستقیم $A^{'}$ به وسیله رابطه R یاد میکنند.

مثال: مثال اول قبلی را در نظر گیریم اگر $A=\{1,2,3,4\}$ و $G=\{(x,y)\in A\times A\,|\,x<y\}$ باشد. پس
$G=\{\left(1,2\right),\left(1,3\right),\left(1,4\right),\left(2,3\right),\left(2,4\right),\left(3,4\right)\}$

در این صورت $R\left(A\right)=\{2,3,4\}$ است و اگر $A^{'}=\{3,4\}$ باشد $R\left(A^{'}\right)=\{4\}$

تعریف: فرض کنیم A و B دو ست بوده $G\subseteq A\times B$ گراف همین رابطه باشد فرض کنیم $B^{'}\subseteq B$ درینصورت

$$R^{-1}(B^{'})=\{x\in A\,|\,R(x)\subseteq B^{'}\}$$

را به نام تصویر معکوس $B^{'}$ در رابطه R یاد میکنند. و $R^{-1}\left(B\right)$ را تصویر معکوس رابطه R گویند.

مثال: در مثال فوق $R^{-1}\left(B\right)=\{2,3,4\}$ است. و اگر $B^{'}=\{3,4\}$ باشد آنگاه $R^{-1}(B^{'})=\{3\}$ است.

ما این تعریف ها را برای روشن ساختن چهار مفهوم ارایه نمودیم.

اگر $R=\left(A,G,B\right)$ یک رابطه باشد.

قلمرو یا ساحه تعریف $A=Domain\,R$ ناحیه تعریف $R^{-1}\left(B\right)=R$

قلمرو یا ساحه قیمت ها $A=Co-Domain\,R$ یا ناحیه قیمت‌ها یا رنج R ست قیمت‌ها، ست تصاویر $R\left(A\right)=$

بعضاً بین ناحیه تعریف و دومین فرقی نمی‌گذارند اما تفکیک طبق تعاریف که درین مورد موجود اند لازمی دانسته میشود.

نوت: در آثار قبلی من بین قلمرو یا ساحه تعریف و ناحیه تعریف فرقی نه شده است اما تصویر مستقیم یک رابطه تعریف گردیده است که از آن باید استنتاج کرد.

جهت توضیح بیشتر، اگر $A=\left(A,G,B\right)$ یک رابطه باشد A دومین است در حالیکه ست همه مرکبه‌های اول جوره‌ها مرتب در G عبارت از تصویر معکوس رابطه یا ناحیه تعریف رابطه است.

رابطه معکوس: هرگاه $R=\left(A,G,B\right)$ یک رابطه دوگانه بین ست‌های A و B باشد در حالیکه

$$G=\{(x,y)\,|\,x\in A\wedge y\in B\}\subseteq A\times B$$

گراف این رابطه است.

در این صورت رابطه $R^{-1}=(B,G',A)$ در حالیکه

$$G'=\{(y,x)\in B\times A\,|\,xRy\}=\{(y,x)\in B\times A\,|\,(x,y)\in G\}$$

گراف انست، را معکوس رابطه R خوانند.

نوت: علامت R^{-1} برای تصویر معکوس رابطه R و علامت R^{-1} برای رابطه معکوس به کار میرود. که در جایش باید است از هم تفکیک گردند.

مثال: اگ $A=\{1,2,3,4\}$ و $G=\{(1,2),(2,3),(3,4)\}$ بوده و $R=\left(A,G\right)$ یک رابطه باشد در آن $G'=\{(2,1),(3,2),(4,3)\}$ و $R^{-1}=(A,G')$ رابطه معکوس R است.

رابطه معادلت ($Equivalent\ Relation$):

معمولاً در پروگرام مکاتب و بالاتر از آن سه نوع رابطه مورد بحث قرار می‌گیرد و استعمال میگردند رابطه تابعوی (بابع)، رابطه معادلت و رابطه ترتیب. ما در این بحث از رابطه معادلت صحبت می‌کنیم.

تعریف: قبول کنیم A یک ست بوده و $R=\left(A,G\right)$ یک رابطه دوگانه در ست A باشد. رابطه R را انعکاسی $\left(\text{Re}\,flexive\right)$ گویند اگر برای هر عنصر $x\in A$ داشته باشیم xRx یا معادل آن $(x,x)\in G$

$$xRx\Leftrightarrow(x,x)\in G,\quad\forall x\in A$$

مثال: فــرض کنیم T ست همه مثلث‌هــا در یک مســتوی P باشد $T=\{t\,|\,P$ مثلث در مستوی $t\}$ $G=\{(t,t')\in T\times T\,|\,t'$ انطباق پذیر با $t\}$ و $\mathbb{R}=\left(T,G\right)$ یک رابطه دوگانه در T و چون هر مثلث با خودش انطباق پذیر است بنابران $\left(t,t\right)\in G$ یا tRt برای هــر $t\in T$ در نتیجه R یک رابطه انعکاسی است.

تعریف: قبول کنیم A یک ست $R=\left(A,G\right)$ یک رابطه دوگانه در A باشد رابطه R را متناظر $\left(Symmetric\right)$ خــوانند، اگــر برای دو عنصر $x,y\in A$ از که xRy، نتیجه شـــود که yRx به عبارت دیگــر

$$xRy\Rightarrow yRx \quad \text{یا} \quad (x,y)\in G\Rightarrow(y,x)\in G$$

مثال: در مثال فوق زمانیکه یک مثلث $t\in T$ با مثلث دیگری $t'\in T$ پذیر باشد، پس مثلث t' نیز با مثلث t انطباق پذیر است به این معنی که

$$tRt'\Rightarrow t'Rt\left(\left(t,t'\right)\in G\Rightarrow\left(t',t\right)\in G\right)$$

تعریف: قبول کینم R یک رابطه دوگانه دریک ست A باشد رابطه R را رابطه انتقالی $(Transitive)$ گویند، اگر برای هر سه عنصر $x,y,z\in A$ با xRy و yRz نتیجه شود که xRz

$$(x,y)\in G\ ,\ (y,z)\in G \Rightarrow (x,z)\in G$$

مثال: باز هم مثال قبلی را درنظر گیریم. هرگاه سه مثلث $t_1,t_2,t_3\in T$ باشند، طوریکه t_1 انطباق پذیر با t_2 و t_2 بانطباق پذیر با t_3 باشد اشکارا t_1 انطباق پذیر با t_3 است.

$$t_1Rt_2 \wedge t_2Rt_3 \Rightarrow t_1Rt_3\left((t_1,t_2)\in G \wedge (t_2,t_3)\in G \Rightarrow (t_1,t_3)\in G\right)$$

تعریف: هرگا A یک‌ست و R یک‌رابطه دوگانه درA باشد. رابطه R را رابطه معادلت $(Equivalent\ Relation)$ گویند، اگر

1. R انعکاسی باشد.
2. R متناظر باشد.
3. R انتقالی باشد.

مثال:

فرض کنیم A ست محصلان صنف اول دارالمعلمین سید جمال الدین است.

$$A=\{x \mid \text{محصل سال اول دارالمعلمین سید جمال الدین } x\}$$

هرگاه ما قبول کنیم که هر محصل هم سن خودش است. در این صورت هم‌سن بودن یک رابطه معادلت در A است.

$$G=\{(x,y)\in A\times A \mid \text{x هم‌سن y است}\}$$

1. چون هر محصل هم‌سن خودش است پس $xRx\left((x,x)\in G\right), \forall x\in A$
2. اگر $x_1,x_2\in A$ باشند، طوریکه x_1 هم‌سن x_2 است پس x_2 نیز هم‌سن x_1 است؛ بنابران

$$x_1Rx_2 \Rightarrow x_2Rx_1\left((x_1,x_2)\in G \Rightarrow (x_2,x_1)\in G\right)$$

بنابرآن R متناظر است.

3. اگر $x_1,x_2,x_3\in A$ باشند طوریکه x_1 هم‌سن x_2 و x_2هم‌سن x_3 است. پس x_1 هم‌سن x_3 است.

$$x_1Rx_2 \wedge x_2Rx_3 \Rightarrow x_1Rx_3\left((x_1,x_2)\in G \wedge (x_2,x_3)\in G \Rightarrow (x_1,x_3)\in G\right)$$

بنابران R انتقالی است.

در نتیجه R یک رابطه معادلت در A است.

پلان ارائه لکچر سوم

موضوع: حاصل ضرب کارتزین دو ست

هدف: تصحیح، تکمیل و توضیح مطالب مربوط این بحث در کتاب درسی ریاضی صورت گرفته روشنی انداخته شود.

پلان تطبیق لکچر:

1. استاد از طریق استادان ترینر این بحث را به وضاحت تشریحمینماید – تعریفات د رمثالها و مفاهیم را توضیح میدهد.

(وقت 40 دقیقه)

2. بعداً دیالوگ در مورد مفاهیم و تطبیق آن، خاصتاً تعبیر هندسی، صورت می‌گیرد و فعالیت‌های ذیل را تطبیق می‌نماید.

(20 دقیقه)

فعالیت ها:

جوره‌های مرتب تعریف گردیده اصول (اکسیوم) جوره‌های مرتب داده شده است.

فعالیت اول: در ست‌های مختلف اعداد تطبیق گردد.

حاصل ضرب کارتزین دو ست به شکل عام آن تعریف و توضیح گردیده است.

فعالیت دوم: مثال های متعددی در کتاب درسی از جانب لکچر دهنده آماده گردند. خاصتاً در ست‌های مختلف اعداد.

حاصل ضرب کارتزین یک ست در خود ست تعریف گردیده و آن در IRxIR ست اعداد حقیقی تطبیق شده است.

مستوی کارتزین توضیح شده است و تعبیر هندسی آن در تقابل یک به یک آن بین نقاط یک مستوی و حاصل ضرب کارتزین IRxIR داده شده است.

فعالیت سوم: مثال های متعددی از حاصل ضرب کارتزین زترول های مختلف داده شود و تعبیر هندسی آن ارائه گردد.

فعالیت چهارم: از دو نوع اشیا قابل شمارش مانند پنسل‌ها و قلم‌ها یا لوبیا و نخود یا کتاب ها و کتابچه ها جوره‌های مرتب می‌سازند.

3. شاملین این موضوعات و مسایل را در کتاب درسی تطبیق مینمایند و مسایل و ابهامات باقی مانده شانرا دریافت کرده با ترینر در میان میگذارد.

(20 دقیقه)

4. نتیجه‌گیری بحث لکچر صورت میگرید.

(10 دقیقه)

لکچر پنجم

تابع و مفهوم آن

هدف: تصحیح، تکمیل و توضیح مطالب در مورد یک تابع است که باید است به آن دقت صورت گیرد.
یک تابع به طور دقیق آن تعریف گردیده است و با رابطه دوگانه ربط داده شده است؛ مگر یک تابع را یک رابطه دوگانه با یک شرط داده شده خوانده ایم.
دومین- کودومین شناختانده شده و گراف یک تابع که توسط یک اصول یا روش مشخص تعیین میشود، تعریف گردیده است. ارایه توابع به اشکال مختلف آن داده شده و توابع عددی معمول معرفی گردیده اند.

فعالیت اول: تعریف تابع به طور دقیق و عملی آن تطبیق گردد.

فعالیت دوم: فرق بین رابطه دوگانه و یک تابع توضیح و در مثال ها داده شود.

فعالیت سوم: انواع مختلف توابع در مثال‌ها داده شود.

تابع (Functionیا Application)

تابع یک نوع رابطه دوگانه است که بین عناصر یک ست و یا دو ست تعریف میشود.

تعریف: قبول کنیم A و B دو ست بوده و $f=(A,G,B)$ یک رابطه باشد. رابطه f را رابطه تابعوی یا تابع می‌نامند اگر شرط ذیل را صدق نمائید:

(R_1) برای هر $x\in A$ تنها یک عنصر $y\in B$ وجود داشته باشد طوریکه xfy یا $(x,y)\in G$.

بعضاً شرط R_1 را چنین هم می‌نویسیم.

(R_1) رابطه $f=(A,G,B)$ را تابع گویند اگر برای هر $x\in A$ از $(x,y)\in G$ و $(x,y')\in G$

$y,y'\in B$ نتیجه شود که $y=y'$ است.

در اینجا نیز A را دومین (قلمرو یا ساحه تعریف)، B را کودومین (قلمرو یا ساحه قیمت‌ها) آن، G را گراف همین تابع گویند و سه تائی $f=(A,G,B)$ یک تابع است.

برای یک عنصر $x\in A$ یگانه عنصر $y\in B$ را که $(x,y)\in G$ باشد به نام قیمت تابع f در x یاد می‌کنند. یا تصویر x ذریعه f نامیده میشود و آنرا معمولاً به وسیله $f(x)$ نمایش میدهند.

بدین ترتیب ارتباط دو عنصر را ذریعه $x\to y$ یا xfy یا $y=f(x)$ می‌نویسند.

$y=f(x)\Leftrightarrow(x,y)\in G$ و بنابران $G=\{(x,f(x))|x\in A\}$

$f(x)$ برای هر x تنها یکی می‌باشد از اینجا اصطلاح مربوطیت f به میان می‌آید که در آن x را متحول مستقل و y را متحول مربوط آن گویند، زیرا قیمت y مربوط به قیمت متحول x میشود.

هرگاه $f=(A,G,B)$ یک تابع باشد آنرا به اشکال

$$A\underset{x\to y=f(x)}{\overset{f}{\to}}B \text{ یا } f:A\underset{y=f(x)}{\to}B$$

می‌نویسند و چنین می‌خوانند که (f) تابع است که بالای A تعریف شده و در B قیمت می‌گیرند بعضا یک تابع f را به وسیله همان اصول (روشی یا فورمولی) تعریف می‌کنند که قیمت تابع f را در x یعنی $f(x)$ را محاسبه می‌کند مگر درین طور حالات گفته میشود که $f: A \to B$ تابع است که ذریعه فورمول $y = f(x)$ یا $x \to y = f(x)$ از A به B تعریف شده است.

به صراحت باید گفت که تابع به هر شکل که افاده شده باشد باید در تعریف آن به طور ضروری سه عنصر ساحه تعریف، ساحه قیمت‌ها و همان اصول یا روشی که قیمت‌های تابع را محاسبه می‌کند و گراف آنرا تشکیل میدهید. موجود باشد و جمعاً همین سه تائی یک تابع را تشکیل میدهید.

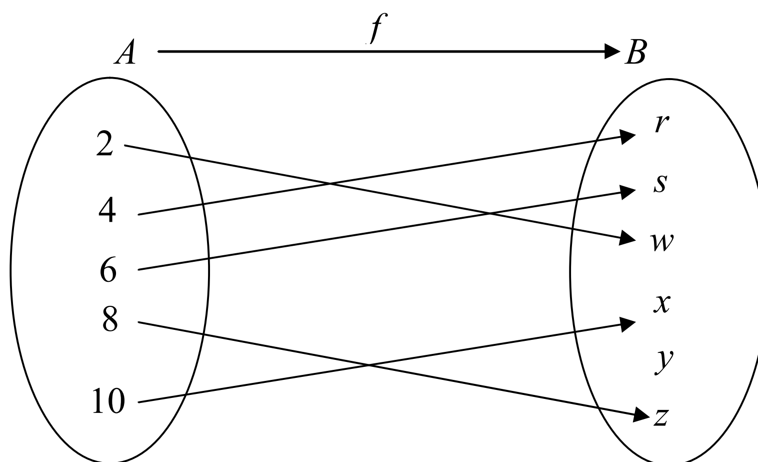
مثال‌ها

1) فرض کنیم A یک ست بوده و $B = \{y_0\}$ متشکل از صرف یک عنصر باشد. درین صورت $f = (A, G, B)$ یک تابع است در حالیکه $G = \{(x, y_o) \mid x \in A\}$ گراف آنست. این تابع به نام تابع ثابت یاد میشود.

هرگاه این تابع را به شکل فورمولیک آن بنویسیم داریم که $f: A \underset{x \to f(x) = y_o}{\longrightarrow} B$

طور نمونه اگر $A = IR$ و $B = \{5\}$ باشد در آن صورت $f: IR \underset{y = f(x) = 5}{\longrightarrow} \{5\}$ یک تابع ثابت است.

2) فرض کنیم $A = \{2, 4, 6, 8, 10\}$, $B = \{r, s, w, x, y, z\}$ بوده و $f: A \to B$ که:



است یک تابع می‌باشد.

درین صورت

$$6 \to f(6) = s \quad , \quad 4 \to f(4) = r \quad , \quad 2 \to f(2) = w \quad , \quad 8 \to f(8) = z$$

و $x = (10) f \to 10$ بوده و بنابران این تابع عبارت از:

$$f = (A, G, B)$$

است. در حالیکه $B \supseteq \{r, s, w, x, z\}$ بوده و به نام ست تصاویر f یا رنج یاد میشود.

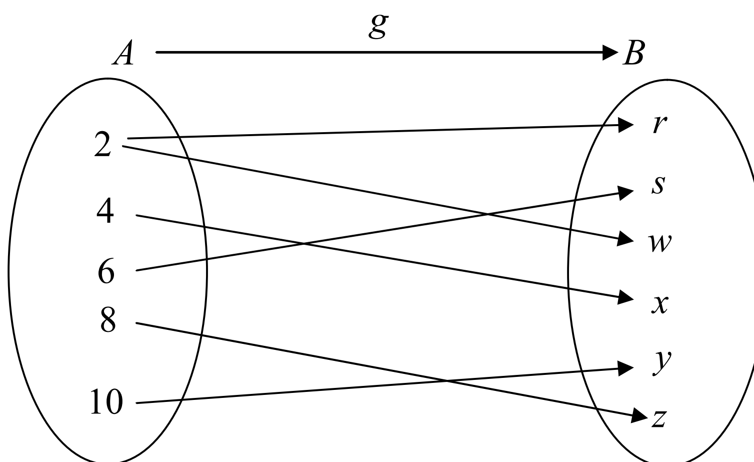
$$\operatorname{Im} f = Range\ f = \{r, s, w, x, z\}$$

این تابع در آغاز به شکل دیاگرام آن تعریف گردیده و بعداً شکل فورمولیک به آن داده شده است.

3) همان ست‌های $A=\{2,4,6,8,10\}$ و $B=\{r,s,w,x,z\}$ را در نظر گیریم. فرض کنیم.

$$g:A\to B$$

قرار ذیل تعریف شده است.

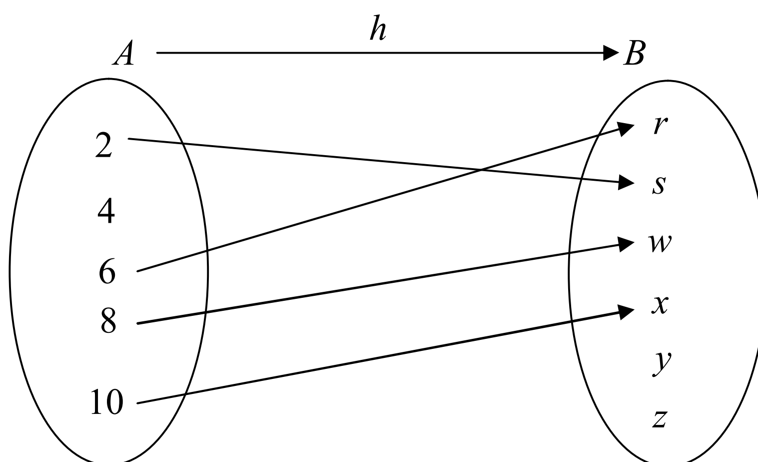


طوریکه

$g(2)=r \quad , \quad g(2)=w \quad , \quad g(4)x \quad , \quad g(6)=s \quad , \quad g(8)=z \quad , \quad g(10)=y$

g تابع نیست زیرا $g(2)=r$ و $g(2)=w$ یک عنصر $2\in A$ دو تصویر را دارا است.

4) فرض کنیم باز هم $A=\{2,4,6,8,10\}$ و $B=\{r,s,w,x,z\}$ بوده $h:A\to B$ قرار ذیل تعریف گردیده باشد.

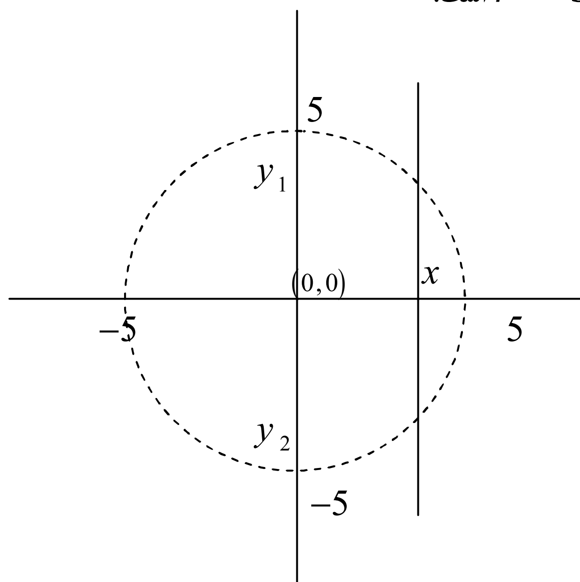


$h(6)=r \qquad h(2)=s$

$h(10)=x \qquad h(8)=w$

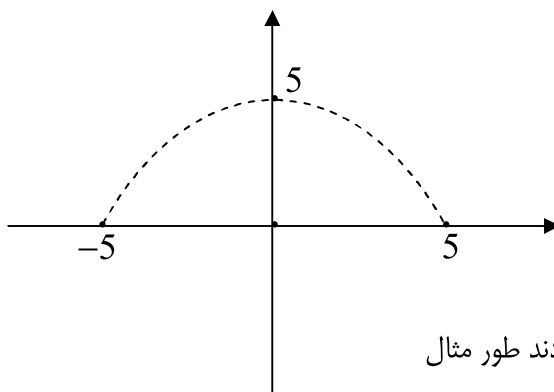
دیده میشود که h تابع نیست زیرا عنصر $4\in A$ تصویر ندارد به عبارت دیگر به کدام عنصر B ربط داده نه شده است.

5) ست اعداد حقیقی IR را در نظر گیریم فرض کنیم $G=\{(x,y)\in IRxIR \mid x^2+y^2=25\}$ باشد. دراین صورت $R=(IR,G)$ یک رابطه بوده اما تابع نیست. چنانچه ترسیم هندسی G خود یک دایره است که مرکز آن مبدا مختصات بوده و شعا آن $r = 5$ است.



اگر با محور y یک موازی را رسم نماییم دایره را در دو نقطه قطع میکند. به این معنی است که یک عنصر $x \in IR$ دو تصویر y_1 و y_2 را دارا میباشد. بازهم به این معنی است که $x \in IR$ دو تصویر را دارا است و R تابع نمی‌باشد.

6) هرگاه $A=\mathbb{R}$ ست اعداد حقیقی و $B=\mathbb{R}+\cup\{o\}$ باشد فرض کنیم.
$G=\{(x,y)\in IRxIR+V\ \{o\} \mid x^2+y^2=25\}$ درین صورت یک تابع است ترسیم هندسی گراف هذا یک تیم دایرهٔ به مرکز مبدا مختصات بوده و در دو ربع اول و دوم مختصات قرار دارد.



توابع به اشکال مختلف ارائه می‌گردند طور مثال

1) توسط دیاگرام
2) توسط جدول
3) به شکل افاده های الجبری
4) ذریعه فورمول
5) ذریعه چندین فورمول

ارائه توابع به شکل دیاگرام. قاعده ارتباط آن‌ها توسط دیاگرام داده میشوند مانند مثال (2)

ارائه توابع به شکل جدول. بعضاً اگر ست‌ها متناهی و قابل شمارش باشد میتوان یک تابع را توسط جدول ارائه کرد.

مثال: اگر $A=\{a,b,c,d,e\}$ و $B=\{1,2,3,4,5\}$ باشد. و $f:A\to B$ در جدول ذیل داده شده باشد.

X	a	B	c	D	E
$f(x)$	5	3	2	1	4

در این صورت اشکال گراف آن

$$G=\{(x,f(x))\,|\,x\in A\wedge f(x)\in B\}$$
$$=\{(a,5),(b,3),(c,2),(d,1),(2,4)\}$$

بدین ترتیب داریم که $f(a)=5$, $f(b)=3$, $f(c)=1$, $f(d)=1$ و $f(4)=4$

توابع صریح و غیر صریح. در بعضی حالات توابع طوری نوشته شده می‌باشند که فورمول آن به شکل y=f(x) نبوده بلکه متحولین مربوطهٔ آنها از هم جدا شده نمی‌باشند و به شکل افاده‌های الجبری می‌باشند.

این نوع توابع را به نام توابع غیر صریح Implicit Function یاد میکنند. مانند $x^3+y^3=1$ بعضاً این نوع تابع را به شکل یک افاده خوانند اما اگر این با در نظر داشت ناحیه تعریف آن به شکل $y=\sqrt[3]{1-x^3}$ آورده شود به نام تابع صریح Explicit Function یاد میشود در توابع غیر صریح کوشش بر آن باید شد که تا حد امکان به شکل تابع صریح آورده شود.

مثال: تابع مثال (6) را در نظر بگیریم که در آن $G=\{(x,y)\in IRxIR+\cup\{0\}\,|\,x^2+y^2=25\}$ است. میتوان آنرا به شکل

$$f':IR\to IR+\cup\{0\}$$
$$y=f(x)=+\sqrt{25-x^2}$$

نوشت.

- توابع یکه به شکل یک فورمول داده شده باشند.

مثال:

$$f:IR\to IR$$
$$f(x)=x^2+2x-1$$

- توابع یکه به شکل چندین فورمول افاده شده باشند و آنرا توابع چندین شاخه‌یی نیز خوانند.

مثال اول:

$$f:IR\to IR$$

$$f(x)\begin{cases}2x-1 & , \quad x\in(-\infty,-2)\\ 4 & , \quad x\in[-2,2]\\ x^2+1 & , \quad x\in(2,\infty)\end{cases}$$

مثال دوم:

$$f:IR\to IR$$

$$f(x)\begin{cases}1 & , \quad x\in\mathbb{Q}\\ -1 & , \quad x\in I=IR\setminus\mathbb{Q}\end{cases}$$

بعضی از انواع خاص توابع

- **تابع عینیت.** برای هر ست A تابع $f:A\to A \quad , \quad f(x)=x$ برای هر $x\in A$ را تابع عینیت در A گویند.

مثال: تابع $f:IR\to IR \quad , \quad f(x)=x$ برای هر $x\in IR$ تابع عینیت در IR است.

- **تابع علامت.** تابع $f:IR\to\{-1,0,1\}$ است که ذریعه فورمول‌های ذیل تعریف شده است.

$$f(x)\begin{cases}1 & , \quad x\in(\infty,0)\\ 0 & , \quad x=0\\ -1 & , \quad x\in(0,\infty)\end{cases}$$

- **توابع عددی.** توابع که ساحه تعریف و ساحه قیمت‌های آن ست‌های اعداد باشند به نـام توابـع عـددی یـاد می‌گردند.

مثال‌ها معمول آن:

تابع ثابت
$$f_1:IR\to IR$$
$$f(x)=c \quad , \quad c\in IR$$

تابع عینی
$$f_2:IR\to IR$$
$$f(x)=x$$

تابع خطی
$$f_3:IR\to IR$$
$$f(x)=ax+b \quad , \quad a,b\in IR$$

تابع درجه دوم
$$f_4:IR\to IR$$
$$f(x)=ax^2+bx+c \quad , \quad a,b\in IR$$

یا به صورت عموم

$$f_5 : IR \to IR$$
$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n \quad , \quad a_0, \ldots, a_n \in IR, n \in \mathbb{N}$$

تابع پولینومیال

یادداشت باید کرد توابع f_1, f_2, f_3 و f_4 حالات خاص توابع پولینومیال اند.

مثال‌های مشخص با ضرایب عددی.

$$f_6 : IR \to IR$$
$$f_6(x) = x$$
$$f_7 : (0,2) \vee (4,\infty) \to IR$$
$$f(x) = 2x - 3$$

تابع مثلثاتی

$$f_8 : IR \to [0,1]$$
$$f(x) = \sin x$$

تابع لوگارتمی

$$f_9 : IR_+ \to IR$$
$$f(x) = \log_a x \quad , \quad a \in IR_+$$

تابع اکسپونیشیل

$$f_{10} : IR \to IR_+$$
$$f(x) = a^x \quad , \quad a \in IR_+$$

همه توابع عددی اند.

تابع چندین فوموله قبلی یک تابع عددی است.

تبصره مهم. بعضاً توابع را بصورت کل Mapping خوانند و توابع عددی را تابع یا Function گویند، اما باالعموم Mapping، Application و Function یک مفهوم را ارائه میکنند. و توابع که ناحیه‌های تعریف و قیمت‌های آن ها ست‌های اعداد باشند آنرا توابع عددی می‌گویم.

توابع ناطق: اگر p(x) و q(x) دو پولینوم با ضرایب در اعداد حقیقی باشند. تابع

$$f(x) = \frac{p(x)}{q(x)} \quad , \quad f : IR \setminus \{x \in IR \mid q(x) = 0\} \to IR$$

را تابع ناطق گویند. یا اینکه تابع ناطق را چون نسبت دو پولینوم تعریف میکنند. چنانجه

$$f : IR \setminus \{0\} \to IR$$
$$f(x) = \frac{3}{x}$$

یا:

$$f : IR \setminus \{-2,3\} \to IR$$
$$f(x) = \frac{4x^3 + 6x^2 + 2}{x^2 - x - 6}$$

مثال‌های توابع ناطق اند.

هرتابع پولینومیال خود یک مثال یک تابع ناطق است.

توابع غیر ناطق. اگر در یک تابع توان‌های کسری یا توان‌های غیر تام برای متحول وجود داشته باشد آن را غیر ناطق گویند.

مثال‌ها

$$f : IR_+ \to IR$$
$$f(x) = \sqrt{x}$$
$$f : IR_+ \setminus \{x \in IR \mid 1 + 5x^2 \leq 0\} \to IR$$
$$f(x) = \frac{2x^2 + \sqrt{x}}{\sqrt{1 + 5x^2}}$$

توابع غیر ناطق اند.

تساوی دو تابع

دو تابع $f : A \to B$ و $g : C \to D$ باهم مساوی گفته میشوند اگر A=C ، B=D و برای هر $x \in A = C$ داشته باشیم که $f(x) = g(x)$ (تصاویر شان باهم مساوی باشند.)

مثال: توابع

$$f : IR \to IR$$
$$f(x) = x^2$$

و

$$g : \mathbb{Q} \to IR$$
$$f(x) = x^2$$

باهم مساوی نمی‌باشند و از هم مختلف اند.

تاکید. بنابراین است که در تعریف توابع حتماً دومین و کودومین و هم اصول مشخصهٔ آن باید داده شده باشند. و یا قبل از قبل مفهوم شده باشند.

مثال: فرض کنیم A ست همه قطعه خطهای محدود در یک مستوی P

B ={a | P قطعه خط محدود در مستوی a}

و B ست همه مساحت‌های، همه مربع‌های باشد که ذریعه هرقطعه خط محدود (هر عنصر $a \in A$) تشکیل می‌گردد.

$$B = \{a^2 \mid a \in A\}$$

درین صورت میتوان تابع

$$f : A \to B$$

$$f(a) = a^2$$

را تعریف نمود طوریکه به هرقطعه خط محدود، مساحت مربع تشکیل شدهٔ آن یعنی a^2 را ربط میدهد.

یادداشت. هرگاه تابع معلوم باشد گراف آن ضمن تابع تعریف شده می‌باشد و اگر گراف آن به شکل الجبریک آن تعریف شده باشد، میتوان تابع ازآن یافت اما اگر گراف آن در مستوی یا فضا ترسیم هندسی داشته باشد از روی آن پیدا کردن فورمول تابع به فکر من مشکل و بعضاً ناممکن است.

پلان ارائه لکچر پنجم

وقت لکچر 40 دقیقه وقت

مناقشه 30 دقیقه وقت

نتیجه‌گیری 20 دقیقه صورت گیرد.

البته شده می‌تواند این ارایه توسط دو شخص انجام شود که در آن صورت برای هرلکچر ارزیابی 20 دقیقه

برای هر دیالوگ 15 دقیقه

و برای هر نتیجه‌گیری و ارزیابی 10 دقیقه وقت داده میشود.

مثال‌ها از کتاب درسی صنف دهم انتخاب و کار شود.

لکچر ششم

انتقال گراف‌ها (انتقال افقی و عمودی و انتقال همزمان افقی و عمودی)

فرض نمائیم که گراف تابع $y = f(x)$ به حیث معیار داده شده باشد و انتقال آن به اشکال دیگر مطلوب باشد. این تغییرات و انتقال گراف‌ها به اشکال مختلف انجام می‌گیرد، که درین جا انتقال عمودی، افقی و انتقال همزمان افقی و عمودی را مورد بحث قرار میدهیم.

1– انتقال افقی (گراف تابع $(y = f(x-a)$: گراف تابع $y = f(x)$ مفروض است، می‌خواهیم گراف تابع $y = f(x-a)$ را رسم نمائیم.

اگر نقطه $M\ (x_0, y_0)$ روی گراف تابع $y = f(x)$ باشد درین صورت نقطه $M'(x_0 + a, y_0)$ روی گراف تابع $y = f(x-a)$ قرار داد برعکس اگر

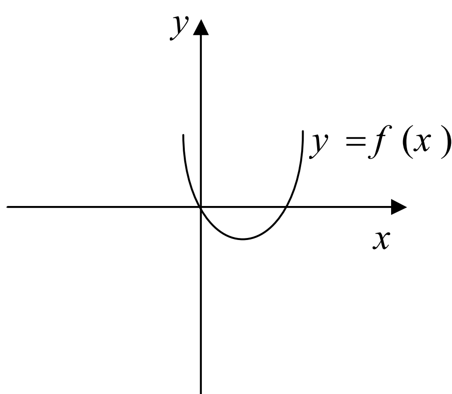
$$M'(x_0 + a, y_0) \in y = f(x-a) \Rightarrow y_0 = f(x_0 + a - a) \Rightarrow \otimes$$

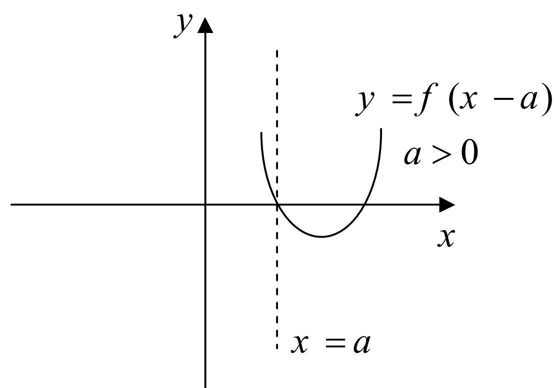
$$y_0 = f(x_0) \Rightarrow M(x_0, y_0) \in f(x)$$

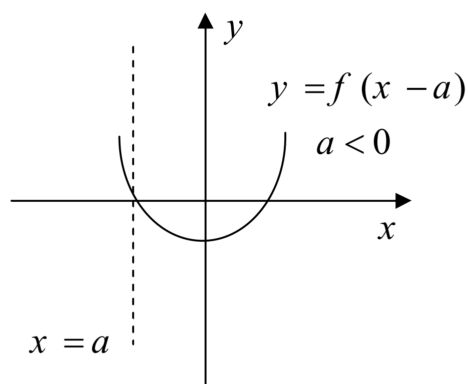
پس میتوان گفت هر نقطه به فاصله x_0 در گراف تابع $f(x)$ (بدون تغییر ترتیب) در گراف تابع $y = f(x-a)$ به نقطه، به فاصله $(x_0 + a)$ تبدیل می‌گردد.

بنابراان برای رسم نمودن تابع $y = f(x-a)$ کافی است که تمام نقاط گراف تابع $y = f(x)$ را به اندازه $x = a$ بالای محور x تغیر مکان دهیم:

اگر $a > 0$ باشد، در ین صورت هر نقطه گراف تابع $y = f(x)$ به اندازه $x = a$ به طرف راست محور x انتقال می‌یابد و اگر $a < 0$ باشد، درین صورت هر نقطه از گراف تابع $y = f(x)$ به اندازه $x = a$ به طرف چپ انتقال می‌نمایند.

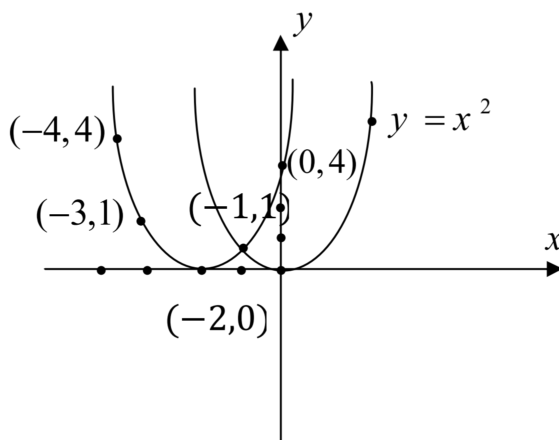






مثال: از انتقال گراف $y = x^2$ گراف تابع $y = (x+2)^2$ را رسم نمائید.

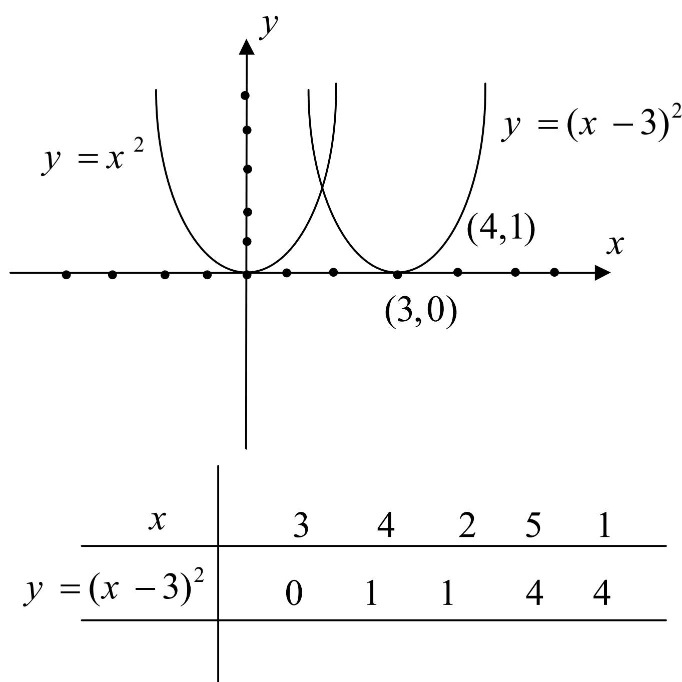
حل: اگر گراف تابع $y = x^2$ به اندازه 2 واحد به طرف چپ انتقال داده شود گراف تابع $y = (x+2)^2$ حاصل می‌شود.



x	0	−2	−1	−3	−4
$y = (x+3)^2$	4	0	1	1	4

مثال: از انتقال گراف $y = x^2$ گراف تابع $y = (x-3)^2$ را رسم نمائید.

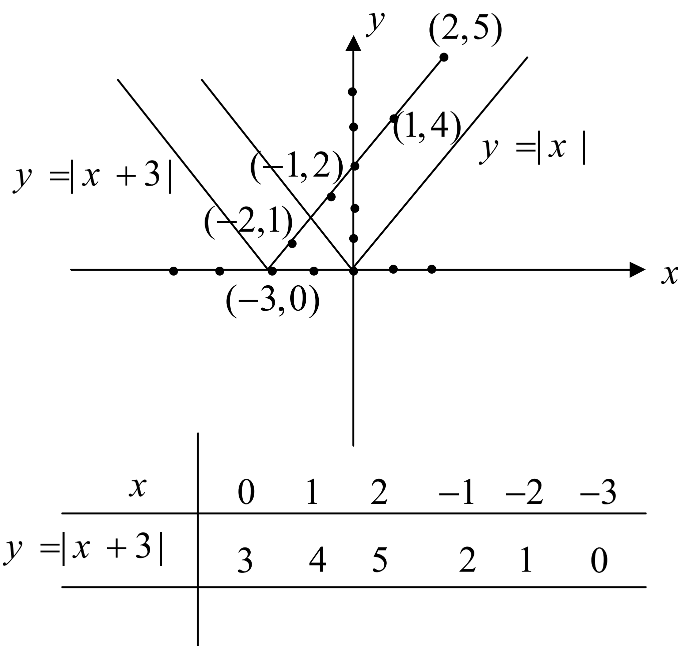
حل: اگر گراف تابع $y = x^2$ به اندازه 3 واحد به طرف راست انتقال داده شود، گراف تابع $y = (x-3)^2$ به دست می‌آید.



x	3	4	2	5	1
$y = (x-3)^2$	0	1	1	4	4

مثال: از انتقال گراف $y = |x|$ گراف تابع $y = |x+3|$ را رسم نمائید.

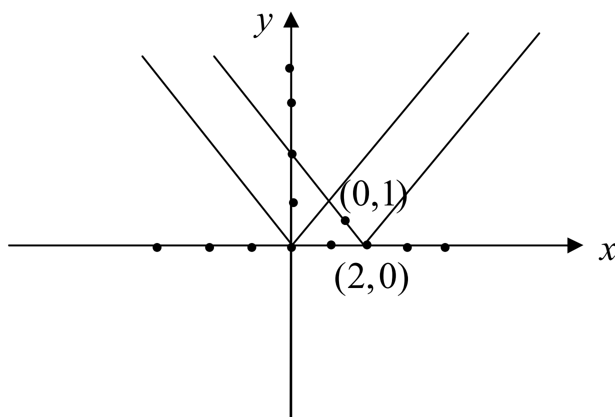
حل: اگر گراف تابع $y = |x|$ به اندازه 3 واحد به طرف چپ انتقال داده شود گراف تابع $y = |x+3|$ حاصل میگردد.



x	0	1	2	−1	−2	−3
$y = \|x+3\|$	3	4	5	2	1	0

مثال: از انتقال گراف $y = |x|$ گراف تابع $y = |x-2|$ را رسم نمایید.

حل: اگر گراف تابع $y = |x|$ به اندازه 2 واحد به طرف راست انتقال داده شود گراف تابع $y = |x - 2|$ حاصل می‌گردد.



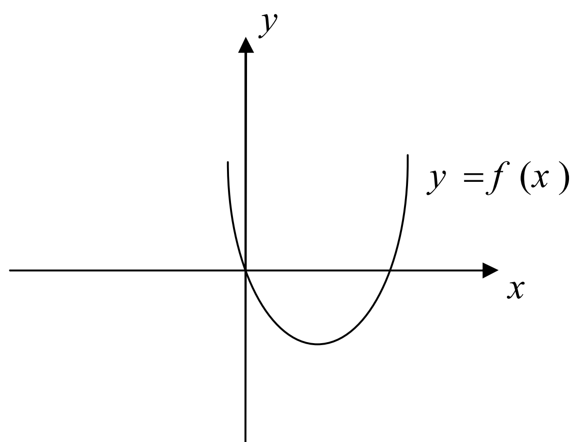
x	0	1	2	−1	−2
$y = \|x - 2\|$	2	1	0	3	4

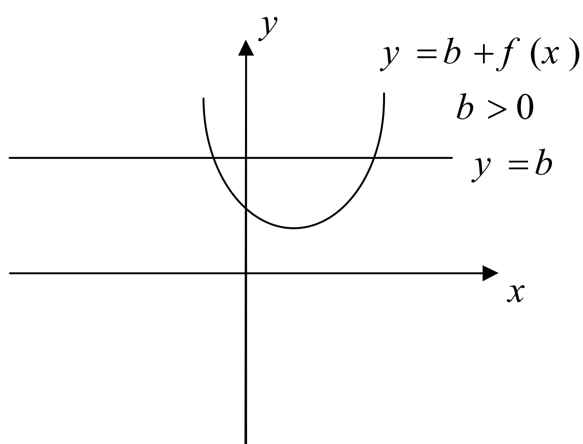
2- انتقال عمودی $(y = b + f(x))$ انتقال عمودی یا به طرف بالا یا به طرف پائین می‌باشد. گراف تابع $y = f(x)$ را رسم نموده و از انتقال گراف تابع $y = f(x)$، گراف تابع $y = b + f(x)$ را رسم می‌نمائیم اگر نقطه $M(x_0, y_0)$ روی گراف تابع $y = f(x)$ باشد، درین صورت نقطه $(-1,4)$ روی گراف تابع $y = b + f(x)$ است. بر عکس اگر

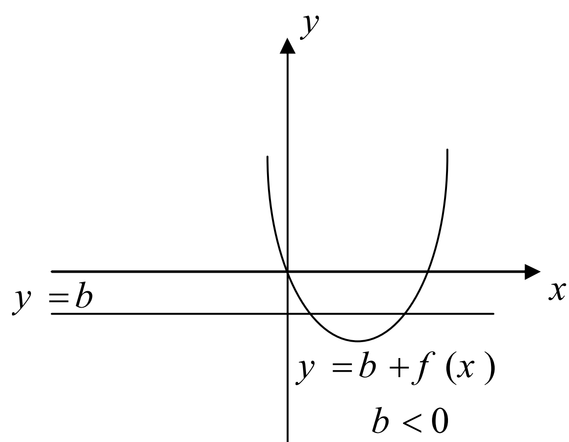
$$M'(x_0, b + y_0) \in y = b + f(x) \Rightarrow b + y_0 = b + f(x) \Rightarrow y_0 = f(x) \Rightarrow M(x_0, y_0) \in f(x)$$

پس هر نقطه با ترتیب y_0 واقع بر گراف تابع $f(x)$ (بدون تغییر فاصله) در گراف تابع $y = b + f(x)$ به ترتیب $b+y_0$ تبدیل می‌شود.

در نتیجه برای ترسیم تابع $y = b + f(x)$ کافی است تا تمام نقاط گراف تابع $f(x)$ را به اندازه $y = b$ در امتداد محور y تغییر مکان دهیم. اگر $b > 0$ باشد در این صورت گراف تابع $f(x)$ به اندازه y=b به طرف بالای محور y انتقال می‌یابد و اگر $b < 0$ باشد درین صورت گراف تابع $f(x)$ به اندازه $y = b$ به طرف پائین محور y انتقال می‌یابد.

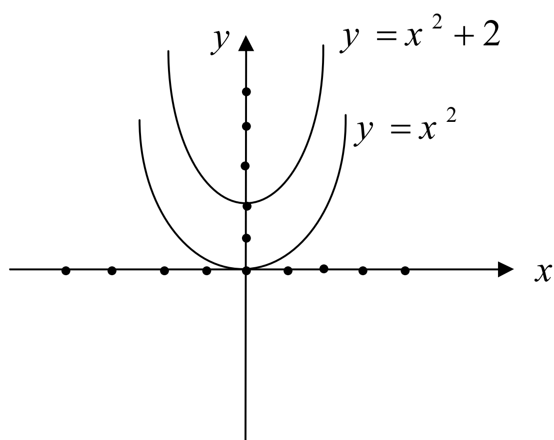






مثال: از انتقال گراف تابع $y = x^2$ گراف تابع $y = x^2 + 2$ را رسم نمائید.

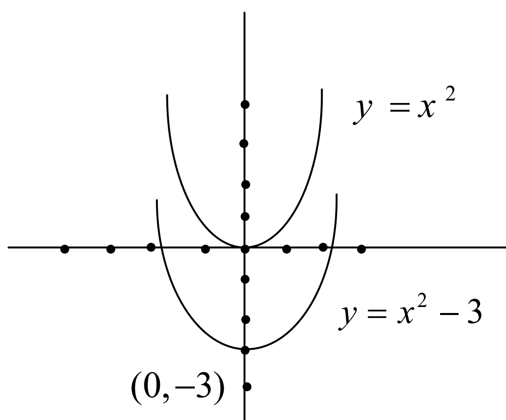
حل: اگر گراف تابع $y = x^2$ را به اندازه 2 واحد به طرف بالا انتقال دهیم گراف تابع $y = x^2 + 2$ به دست می‌آید.



x	0	1	2	−1
$y = x^2 + 2$	2	3	6	3

مثال: از انتقال گراف تابع $y = x^2$ گراف تابع $y = x^2 - 3$ را رسم نمائید.

حل: اگر گراف تابع $y = x^2$ را به اندازه 3 واحد به طرف پائین انتقال دهیم گراف تابع $y = x^2 - 3$ بدست می‌آید.

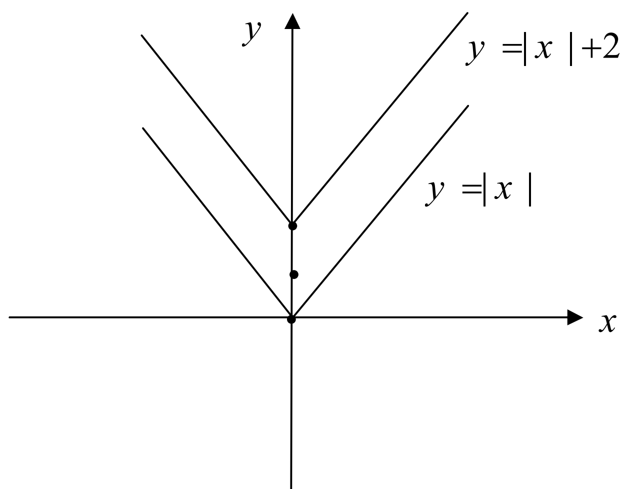


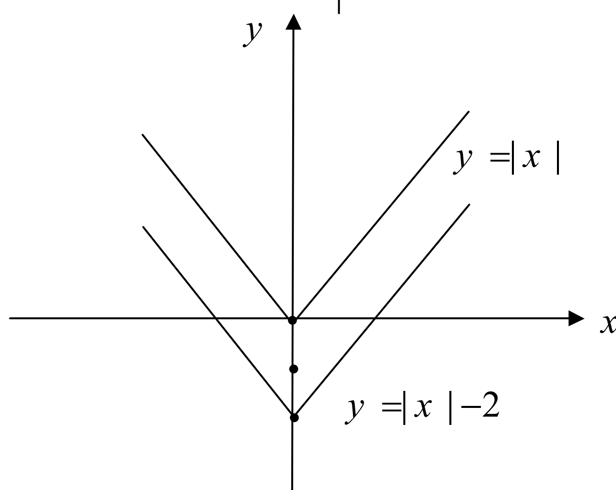
x	0	1	2	−1
$y = x^2 - 3$	−3	−2	1	−2

مثال: از انتقال گراف تابع $y=|x|$ گراف تابع $y=|x|+2$ و گراف تابع $y=|x|-2$ را رسم نمائید.

حل: اگر گراف تابع $y=|x|$ را به اندازه 2 واحد به طرف بالا انتقال دهیم گراف تابع $y=|x|+2$ به دست می‌آید و اگر گراف تابع $y=|x|$ به اندازه 2 واحد به طرف پائین انتقال دهیم گراف تابع $y=|x|-2$ حاصل می‌شود.

x	0	1	2	−1	−2
$y=\|x\|-2\|$	−2	−1	0	−1	0
$y=\|x\|+2$	2	3	4	3	4



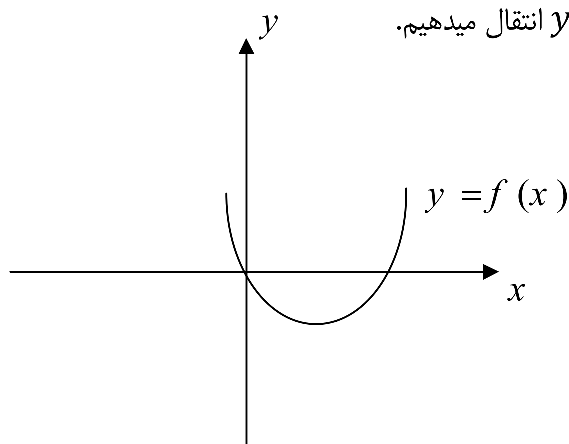


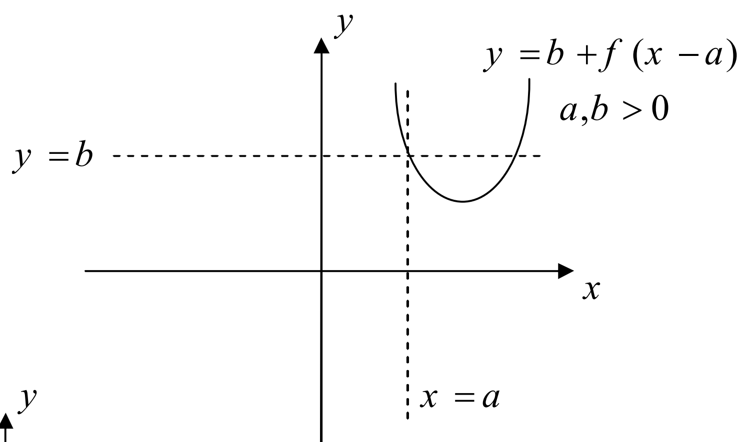
3– انتقال همزمان افقی و عمودی (گراف تابع $y = b + f(x-a)$): در حقیقت اولاً از انتقال تابع $f(x)$ گراف تابع $y = f(x-a)$ را به شکل افقی رسم نموده و بعد از آن از انتقال تابع $y = f(x-a)$ به شکل عمودی گراف تابع $y = b + f(x-a)$ را دریافت می‌نمائیم.

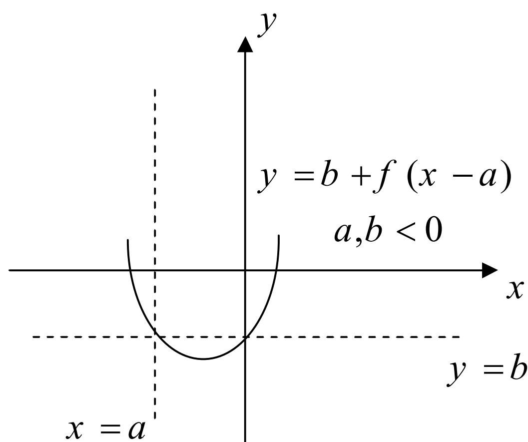
اگر نقطه $M\ (x_0, y_0)$ روی گراف تابع $f(x)$باشد، درین صورت نقطه $M'(x_0 + a, y_0 + b)$ روی گراف تابع $y = b + f(x - a)$واقع است و برعکس اگر

$$M'(x_0 + a, y_0 + b) \in y = b + f(x - a) \Rightarrow y_0 + b = b + f(x_0 + a - a)$$
$$\Rightarrow y_0 = f(x_0) \Rightarrow M(x_0, y_0) \in f(x)$$

بنابرین برای رسم نمودن تابع $y = b + f(x - a)$ هر نقطه از گراف تابع $f(x)$ را به اندازه a به امتداد محور x و به اندازه b به جهت محور y انتقال میدهیم.



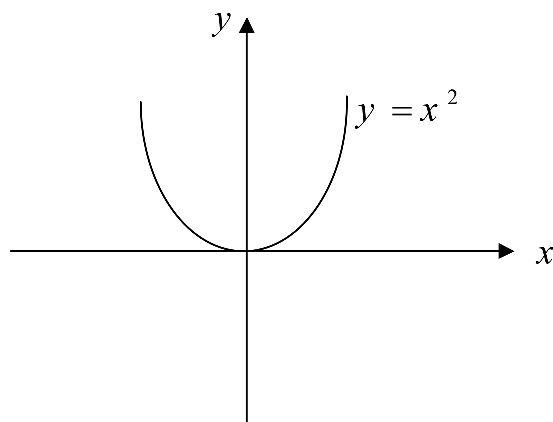


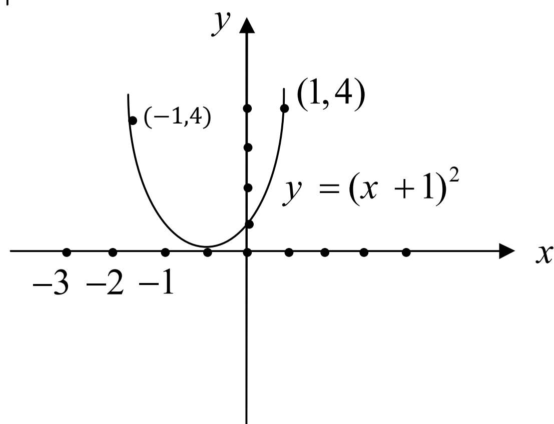


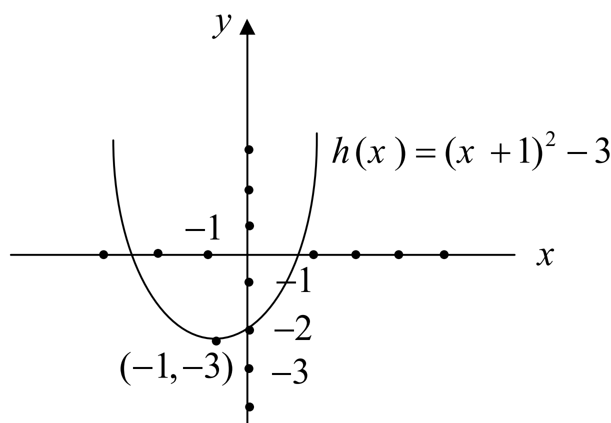
مثال: از انتقال گراف تابع $y=x^2$ گراف تابع $h(x) = (x + 1)^2 - 3$ را رسم نمائید.

حل: تابع $h(x) = (x+1)^2 - 3$ را به شکل $h(x) = g(x) - 3$ ارایه می‌نمائیم در حالیکه $g(x) = (x+1)^2$ در اول گراف تابع $y=x^2$ را رسم نموده و آنرا به اندازه یک واحد به طرف چپ محور x انتقال میدهیم، تا گراف تابع $g(x) = (x+1)^2$ حاصل گردد. بعد از آن تابع $g(x) = (x+1)^2$ را به اندازه 3 واحد به طور عمودی به طرف پائین انتقال میدهیم که گراف تابع $h(x) = (x+1)^2-3$ حاصل می‌گردد.

x	-1	0	1	-3
$g(x) = (x+1)^2$	0	1	4	4
$h(x) = (x+1)^2 - 3$	-3	-2	1	1



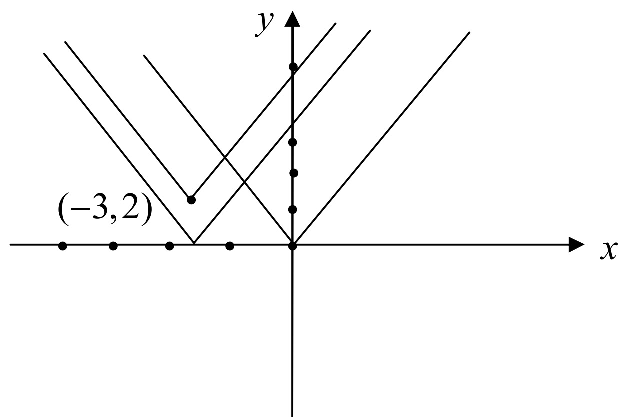




مثال: از انتقال گراف تابع $y = |x|$ گراف تابع $y = |x + 3| + 2$ را رسم نمائید.

حل:

x	0	1	-1	-2	-3	3	2
$g(x) = \|x + 3\|$	3	4	2	1	0	9	5
$h(x) = \|x + 3\| + 2$	5	6	4	3	2	8	7



پلان ارائه لکچر ششم:

1. یک تن از شاملین به همکاری ترینر مفاهیم انتقال عمودی، افقی و همزمان را از روی متن فوق در یک مثال تشریح کرده به روی تخته یا کاغذ گراف عملا اجرا نماید.

(وقت لکچر 40 دقیقه)

2. مثالهای متباقی را در مناقشه صنف شاملین بحث میکنند.

(وقت 20 دقیقه)

3. یک دیالوگ بر موضوعات صورت گیرد.

(2 دقیقه)

4. در اخر ترینر نتیجه‌گیری بحث و ارزیابی لکچر نمیاد.

(10 دقیقه)

مثال‌ها از کتاب درسی صنف دهم انتخاب و کار شود.

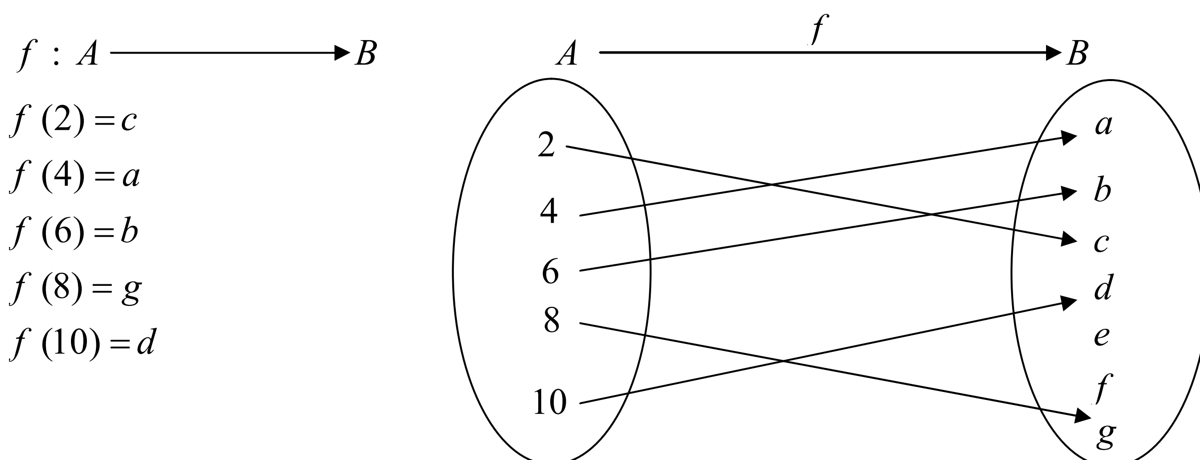
لکچر هفتم

توابع بایجکتیف و معکوس پذیری توابع

مفاهیم توابع انجکتیف، سورجکتیف و بایجکتیف بنابر داشتن خاصیت‌های مشخص توابع تعریف گردیده اند و تابع معکوس تعریف و با توابع بایجکتیف ربط داده شده است.
متذکر باید شد که تعبیر گوناگون ازین نوع توابع دیده میشود اما مطالب که درینجا داده شده است تصحیح شده، دقیق، کامل بوده و توضیحات لازم خود را دارد. از آنرو از خوانندگان محترم تقاضا می‌شود که این مفاهیم ریاضی به دقت دیده و به طور دقیق به کار برند.

تعریف: یک تابع $f : A \to B$ را انجکتیف Injective یا (one- one) گویند، اگر برای هر دو عنصر $x_1, x_2 \in A$ وقتیکه $x_1 \neq x_2$ باشد، نتیجه شود که $f(x_1) \neq f(x_2)$ یا معادل آن اگر $f(x_1) = f(x_2)$ باشد نتیجه شود که $x_1 = x_2$ است.

مثال‌اول: فرض کنیم A={2, 4, 6, 8, 10} و B={a, b, c, d, e, f, g} دو ست بوده و



یک تابع انجکتیف است.

مثال دوم. تابع $f : IR \to IR$ ، $f(x) = x^3$ یک تابع انجکتیف است. چنانجه اگر $x_1, x_2 \in IR$ باشند، طوریکه $f(x_1)=f(x_2)$ اینجا x_1^3, x_2^3 یا $x_1 = x_2$ است.

مثال سوم. تابع $1_{IR} : IR \to IR$ ، $1_{IR}(x) = x$ برای هر $x \in IR$ یک تابع انجکتیف است.

تعریف. یک تابع $f : A \to B$ را تابع سورجکتیف (Surjective) یا (onto) گویند، اگر برای هر عنصر $y \in B$ یک عنصر $x \in A$ وجود داشته باشد، طوریکه $y = f(x)$

مثال‌ها

1) مثال اول قبلی تابع سورجکتیف نیست زیرا برای، $e \in B$ و هم $f \in B$ عناصر در A وجود ندارند که آنها تصاویرش باشند.

2) تابع

$$f : IR \to IR$$
$$y = f(x) = x^3$$

یک تابع سورجکتیف زیرا برای $y \in \mathbb{R}$ عنصر $x = \sqrt[3]{f(x)} = \sqrt[3]{y}$ وجود. داردطوریکه $f(x) = \sqrt[3]{y^3}\, y$

$$A \xrightarrow{f} B$$

3) برای ست A تابع عینی آن $1_A : A \to A$,$1_A(x) = X$یک تابع سود جکتیف است.

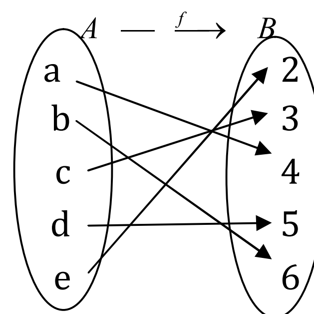
تعریف. یک تابع $f : A \to B$ را بایجکتیف Bijective یا One to One گویند، اگر f انجکتیف و هم سورجکتیف باشد.

مثال ها

(1) تابع عینی هر ست $1_A : A \to A$ بایجکتیف است.

(2) تابع $f(x) = x^3, f : R \to R$ یک تابع بایجکتیف است.

(3) اگر $B = \{2,3,4,5,6\}, A = \{a,b,c,d,e\}$



$f : A \to A$

$f(a)=4$

$f(b)=6$

$f(c)=3$

$f(d)=5$

$f(e)=2$

یک تابع بایجکتیف است

(4) تابع $f(x) = x^2, f : R \to R$ یک تابع بایجکتیف نیست انجکتیف نیست زیرا برای $9 \in R$ دو عدد $3,3 \in R$ – وجود دارند چنانچه

$$f(3) = 3^2 = 9 = (-3)^2 = f(-3)$$

اما $3 \neq -3$

این تابع سورجکتیف نیز نیست زیرا برای $-3 \in R$ عدد $x \in \mathbb{R}$ و جود ندارد که برای آن $f(x)$ مساوی به -3 شود.

اگر فرض کنیم $x = \sqrt{-3}$ باشد انگاه $x \notin \mathbb{R}$

(5) تابع $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = |x|$ تابع بایجکتیف نیست زیرا برای $2, -2 \in R$ داریم که $2 \neq -2$ اما

$f(2) = |2| = 2$

$f(-2) = |-2| = 2$

تعریف. قبول کنیم $f: A \to B$ یک تابع است تابع f را معکوس پذیر گویند، اگر یک تابع $f': B \to A$ وجود داشته باشد، طوریکه $f'of = 1A$ و $fof' = 1_B$ در حالیکه 1_A تابع عینی ست A و 1_B تابع ست B است.
این طور تابع f' را معکوس تابع f گویند و معمولاً انرا به وسیله f^{-1} نمایش بدهند.

مثال ها:

(1) تابع عینی هر ست $1_A: A \to A, A$ معکوس پذیر است و معکوس آن $1_A^{-1}: A \to A$, $1_A^{-1}(x) = x$

(2) تابع $f(x) = 10^x, f: R \to R_+$ یک تابع معکوس پذیر است زیرا تابع $f(x) = \log x, f': R_+ \to R$ تابع معکوس انست طوریکه:

$$\mathbb{R} \xrightarrow{f} \mathbb{R}_+ \xrightarrow{f'} \mathbb{R}, \quad \xrightarrow{f'of}$$

$$\left(f'of\right)(x) = f'\left(f(x)\right) = f'\left(10^x\right) = \log 10^x = x, \forall x \in \mathbb{R}$$

و

$$\left(fof'\right)(x) = f\left(f'(x)\right) = f\left(\log x\right) = 10^{\log x} = x, \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\mathbb{R}_+ \xrightarrow{f'} \mathbb{R}_+ \xrightarrow{f} \mathbb{R}_+, \quad \xrightarrow{fof'}$$

پس $f' = f^{-1}$ است.

3. تابع $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ ، $f(x) = \sqrt[3]{x}$ یک تابع معکوس پذیر است زیرا تابع $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ ، $f'(x) = x^3$ معکوس انست طوریکه $\left(f'of\right)(x) = f'\left(f(x)\right) = f'\left(\sqrt[3]{x}\right) = \left(\sqrt[3]{x}\right)^3 = x, \forall x \in \mathbb{R}$

و

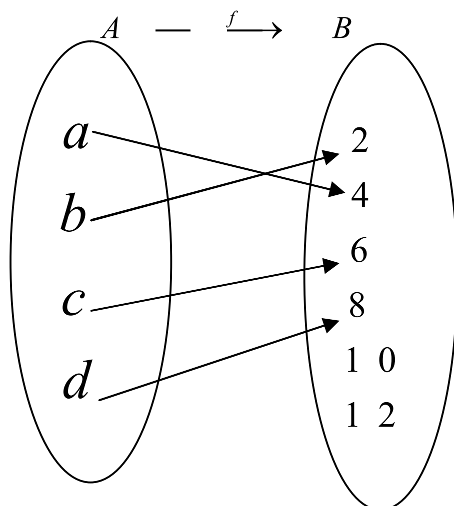
$$\left(fof'\right)(x) = f\left(f'(x)\right) = f\left(x^3\right) = \sqrt[3]{x^3} = x, \forall x \in \mathbb{R}$$

دعوی (بدون ثبوت): یک تابع $f: A \to B$ معکوس پذیر است اگر و تنها اگر f یک تابع بایجکتیف باشد.

پس اگر یک تابع بایجکتیف باشد آن تابع معکوس پذیر است و اگر تابع معکوس پذیر باشد آن تابع بایجکتیف است.

تبصره ها:

1. در بعضی موارد دیده شده است که توابع انجکتیف $one-one$ را توابع معکوس پذیر گفته شده که صحت آن درست نیست. طور مثال تابع



f یک تابع انجکتیف است اما سورجکتیف نبوده و معکوس پذیر نیست.

2. بعضاً تابع انجکتیف را تعریف نموده و انرا $one\,to\,one$ گفته که این هم $one-one$ بوده و $one\,to\,one$ تابع بایجکتیف تعریف میگردد

پلان ارایه لکچر هفتم

این لکچر بین دو شاملین سیمینار تقسیم می‌گردد و هر کدام با آماده‌گی قبلی برای 20 دقیقه لکچر میدهید، پس از توضیحات هریک شان 15 دقیقه سوال و جواب صورت می‌گیرد. و در آخر هرکدام برای 10 دقیقه ترینر از آن نتیجه‌گیری و ارزیابی می‌نماید.

لکچر هشتم

توابع ناطق و گراف آن ها (مجانب های عمودی، افقی، و مایل)

تعریف: تابع ناطق عبارت از تابع است که از خارج قسمت دو تابع پولینومی تشکیل شده باشد اگر $f(z)\dfrac{p(x)}{g(x)}$ باشد در حالیکه $g(x)\neq a$ و $p(x)$ پولینوم ها اند درین صورت $f(x)$ را تابع ناطق گویند. طور مثال توابع $f(x)=\dfrac{1}{x}$, $h(x)=\dfrac{x^3-1}{x}$, $g(x)=\dfrac{x+1}{x-1}$ و $p(x)=x^2+1$ توابع ناطق اند.

دریافت ناحیه تعریف یک تابع ناطق: ناحیه تعریف تابع ناطق سیت تمام اعداد حقیقی است بدون آن قیمت های x که در آن مخرج تابع ناطق صفر می شود.

مثال: ناحیه تعریف هریک از توابع ناطق ذیل را دریافت نمائید.

$$f(x)=\frac{x^2+1}{x-2}\ \text{و}\ g(x)=\frac{x}{x^2-9}\ ,\ h(x)=\frac{x+3}{x^2-9}$$

حل: در تابع $f(x)$ مخرج تابع به قیمت $x-2$ صفر می شود، پس عدد 2 در ناحیه تعریف تابع ناطق $f(x)$ شامل نیست یا $Dom\ f(x)=\{x/x\in\mathbb{R},x\neq 2\}$ در تابع $g(x)$ به قیمت های $x=\pm 3$ مخرج تابع صفر می شود، در نتیجه اعداد 3 و -3 در ناحیه تعریف $g(x)$ شامل نیست.

$$Dom\ g(x)=\{x/x\in\mathbb{R}\ ,\ x\neq 3,x\neq -3\}$$

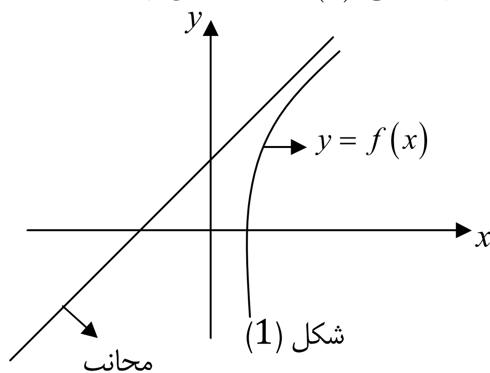
مخرج تابع $h(x)$ به هیچ قیمت حقیقی x صفر نمی شود، پس ناحیه تعریف $h(x)$ سیت تمام اعداد حقیقی میباشد.

$$Dom\ h(x)=\mathbb{R}\ \text{یا}\ Dom\ h(x)=(-\infty,+\infty)$$

تعریف خط مجانب: مجانب، خط مستقیم است که شاخه گراف تابع $y=f(x)$ در بی نهایت مماسل شود مانند شکل (1) و به شکل عمومی مجانب به سه نوع است.

1. مجانب عمودی
2. مجانب افقی
3. مجانب مایل

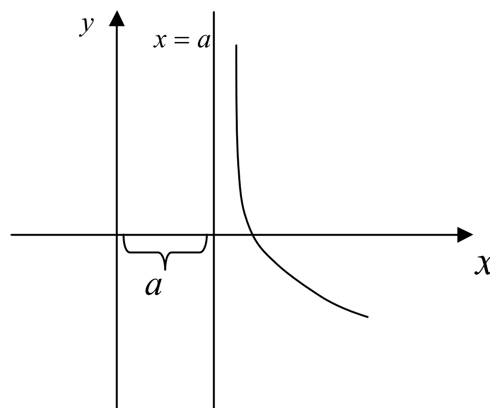
اکنون هر یک آنرا تشریح می نمائیم



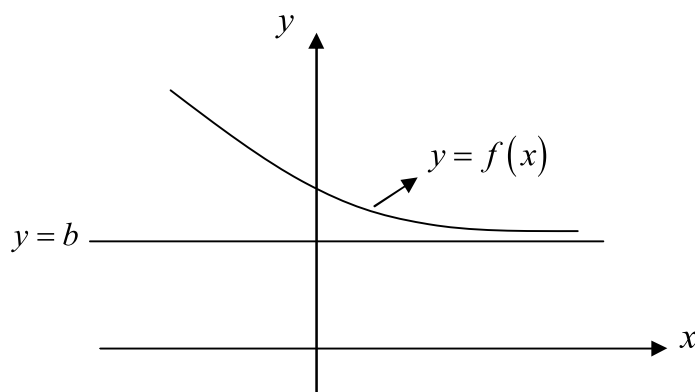
شکل (1)

1. **مجانب عمودی:** هرگاه دریک تابع ناطق $f(x)=\dfrac{p(x)}{g(x)}$ که صورت و مخرج فکتور مشترک نه داشته وه باشد. اگر $g(a)\neq 0$ باشد خط مستقیم $x=a$ مجانب عمودی تابع $y=f(x)$ است که $p(a)\neq 0$

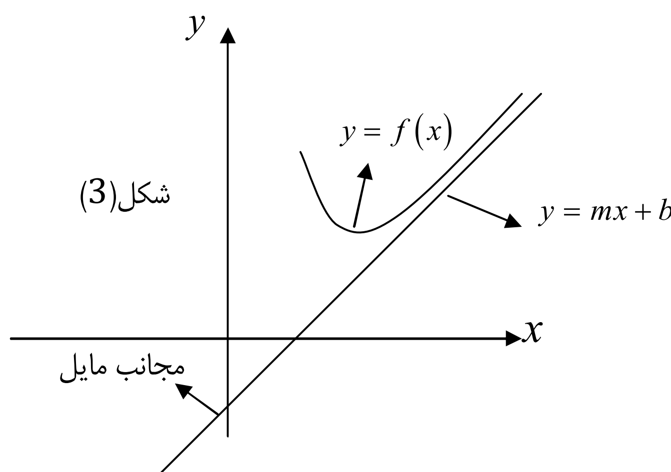
موازی با محور y میباشد. تعداد مجانب های عمودی مساوی به جذر های مخرج میباشند یا به عبارت دیگر اگر x به طرف بی نهایت تقرب نمایند $(x \to a)$ درنتیجه $f(x) \to +\infty$ و یا $f(x) \to -\infty$ ، پس خط عمودی $x = a$ مجانب عمودی تابع میباشد. مانند شکل (2)



2. **مجانب افقی:** هر گاه در یک تابع $f(x) = \dfrac{p(x)}{g(x)}$, x به طرف بی نهایت تقرب نمایند $(x \to \pm\infty)$ و تابع $f(x)$ به یک عددمعین $f(xb)$ تقرب می نمایند درین صورت گویند که $y = b$ مجانب افقی است.



3. مجانب مایل: مجانب که نه عمودی ونه افقی باشد نبام مجانب مایل یاد میگردد و شکل عمومی مجانب مایل خط مستقیم $y = mx + b$ بوده که به شاخه از گراف تابع $y = f(x)$ در بی نهایت مماس است. مانند شکل (3)



هرگاه درجه صورت یک تابع ناطق از درجه مخرج به اندازه یک واحد زیاد باشد واضح است که مجانب افقی نه داشته و درین صورت تابع مجانب مایل دارد. و پولینوم صورت را بر پولینوم مخرج تقسیم نموده و خارج قسمت عبارت از مجانب مایل است.

$$y = f_1(x) + \frac{f_2(x)}{g(x)}$$

در حالیکه $f_1(x)$ خارج قسمت و $f_2(x)$ باقی مانده بوده و $y = f_1(x) = mx + b$ مجانب مایل است.

گراف تابع ناطق: برای ترسیم گراف تابع ناطق باید نکات ذیل را درنظر گرفت.

1. ناحیه تعریف تابع باید تعین شود.
2. نقاط تقاطع گراف (منحنی) با محور x و محود y.
3. دریافت مجانب ها
4. کمیات و ضیعه چند نقطه دیگر را تعین می نمائیم.

مثال2: گراف تابع $f(x) = \frac{2x}{x-1}$ را رسم نمائید.

حل: ناحیه تعریف تابع $f(x) = \frac{2x}{x-1}$ تمام اعداد حقیقی است بدون $x-1$

$$Domf = \mathbb{R} \setminus \{1\}$$

2. **تقاطع گراف با محور** x: نقطه گراف با محور x قیمت $f(x) = 0$ می شود در نتیجه داریم که

$$0 = \frac{2x}{x-1} => \begin{matrix} 2x = 0 \\ x = 0 \end{matrix}$$

گراف تابع محور x را در نقطه $(0\ ,\ 0)$ قطع می نمایند.

تقاطع گراف با محور y: باید $x = 0$ شود. در نتیجه $f(0) = \frac{2 \cdot 0}{0-1} = 0$، پس نقطه $(0\ ,\ 0)$ نقطه تقاطع گراف با محور y است.

3. **مجانب ها**

مجانب عمودی: مخرج تابع ناطق $x - 1 = 0 => x = 1$ در نتیجه $x = 1$ مجانب عمودی است.

مجانب افقی: اگر x به بی نهایت تقرب نمایند $f(x) = 2$ مجانب افقی است.

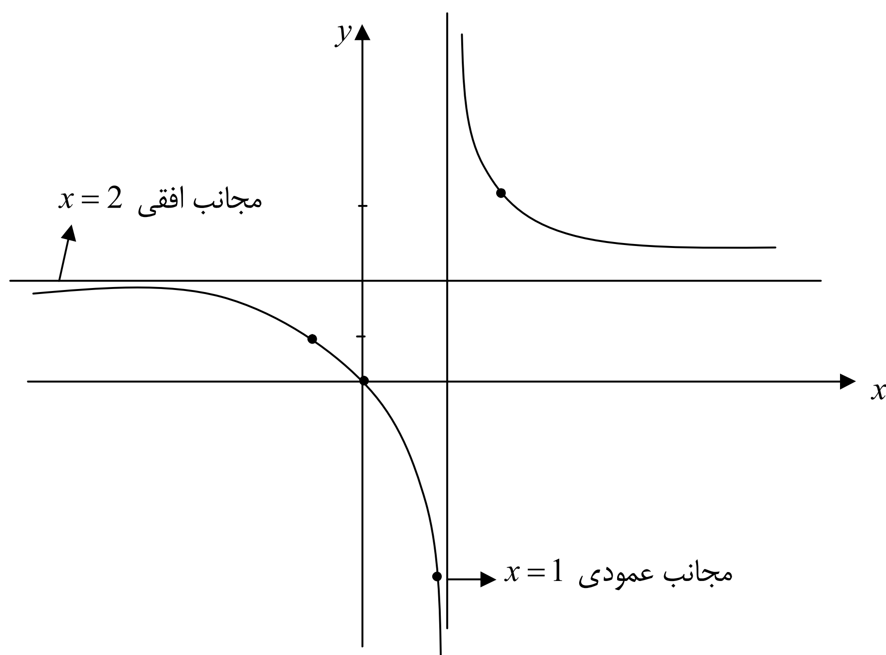
$$f(x) = 2 + \frac{2}{x-1} \text{ یا } f(x) = \frac{2}{1-\frac{1}{x}} = 2$$

مجانب مایل نه دارد.

4. کمیات وضیعه چند نقطه دیگر

x	0	-2	-1	$\frac{1}{2}$	2	4
$f(x)=\dfrac{2x}{x-1}$	0	$\frac{4}{3}$	1	-2	4	$\frac{8}{3}$

5. نقاط تقاطع با محورات و مجانب ها و کمیات نقطه های فوق را در سیستم مختصات قایم ذیل تثبیت نموده و آنهارا باهم وصل می نمائیم که در نتیجه گراف تابع حاصل می گردد.



مثال3: گراف تابع $f(x)=\dfrac{x+2}{x-2}$ را ترسیم نمائید.

حل: ناحیه تعریف تابع سیت تمام اعداد حقیقی است بدون $x=2$

$$Domf=\mathbb{R}\setminus\{2\}$$

2. تقاطع گراف با محور x: باید $f(x)=0$ شود در نتیجه

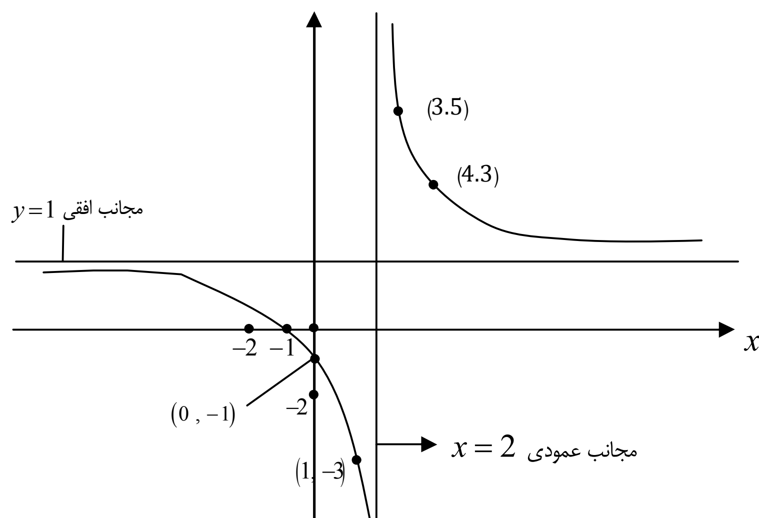
$$\frac{x+2}{x-2}=0 \qquad \begin{aligned} x+2&=0\\ x&=-2 \end{aligned}$$

در نقطه $(-2\ ,\ 0)$ گراف تابع محور x را قطع می کند.

تقاطع گراف با محور y:باید $x=0$ شود درنتیجه $f(0)=-1$ است. گراف تابع محور y را در نقطه $(0\ ,\ -1)$ قطع می نمایند.

3. معادله مجانب عمودی $x=2$ و معادله مجانب افقی $y=1$ $f(x)=y=1$ است.
4. کمیات وضیعه چند دیگر

x	-1	0	1	3	4
$f(x)=\dfrac{2x}{x-1}$	$-\dfrac{1}{3}$	-1	-3	5	3



مثال4: گراف تابع $f(x)=\dfrac{x^2+1}{x-1}$ را ترسیم نمائید.

حل: 1: ناحیه تعریف تابع سیت تمام اعداد حقیقی بدون $x=1$ میباشد

$$Dom\ f=\mathbb{R}\setminus\{1\}$$

2: تقاطع با محورات:

تقاطع با محور x: باید $f(x)=0$ باشد.

$$\frac{x^2+1}{x-1}=0 \qquad \begin{matrix} x^2+=0 \\ x^2=-1 \end{matrix}$$

در اعداد حقیقی حل نه دارد. بنابران گراف تابع محور x را قطع نمی نمایند.

تقاطع با محور y: باید $x=0$ شود، بنابران $f(0)=-1$ بوده و محور y را در نقطه $(0\ ,\ -1)$ قطع می نمایند.

3: **مجانب ها:** مجانب عمودی تابع $x=1$ است. چون توان صورت از مجرج به اندازه یک زیات است بنابران مجانب مایل دارد. صورت را بر مخرج تقسیم می نمائیم.

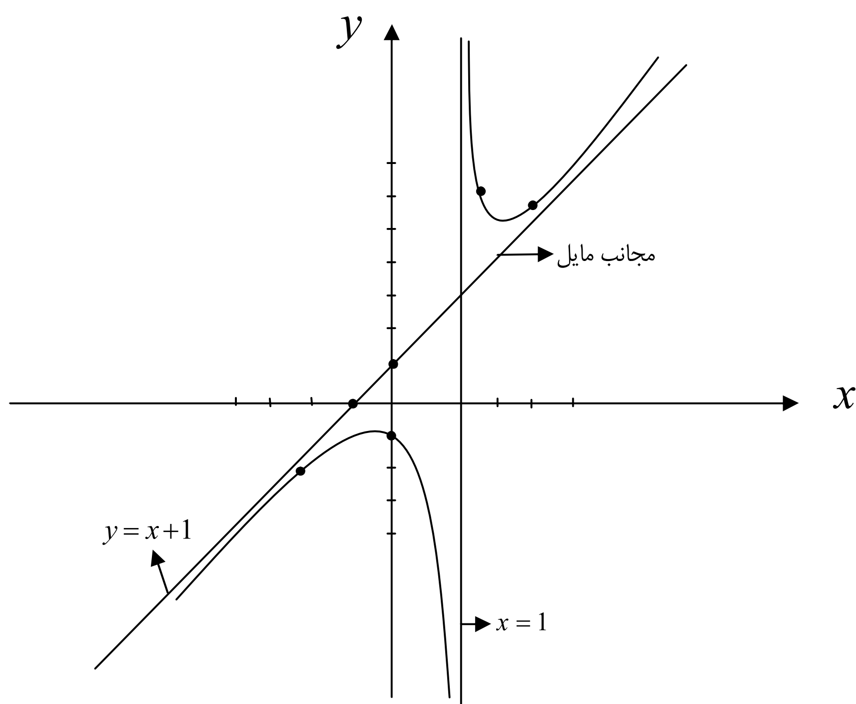
$$f(x)=\frac{x^2+1}{x-1}=x+1+\frac{2}{x-1}$$

در نتیجه مجانب مایل $x+1$ است.

مجانب افقی نه دارد.

4: کمیات وضیعه چند نقطه دیگر:

x	2	3	0	-1	-3
$f(x)$	5	5	-1	-1	-2.5



تبصره: اگر در تابع $f(x)=\dfrac{p(x)}{g(x)}$ اعداد m , n به ترتیب درجه های صورت و مخرج باشد درین صورت میتوان نوشت.

1. اگر $m<n$ باشد، محور x مجانب افقی میباشد.
2. اگر $m=n$ باشد $y=b$ مجانب افقی میباشد. b عبارت از نسبت ضرایب حدود که درجه های آن m و n میباشد.
3. اگر $m>n$ باشد گراف تابع مجانب افقی ندارد.
4. اگر درجه صورت به اندازه یک اضافه تر از درجه مخرج باشد گراف تابع، مجانب مایل دارد.

یک تابع ناطق میتواند یک یا چند مجانب عمودی را دارا باشد، در حالی که یک مجانب افقی یا یک مجانب مایل دارد.

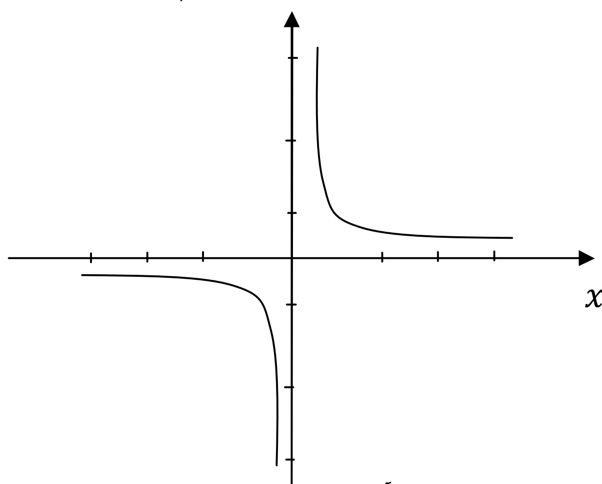
مثال: مجانب ها و نقاط تقاطع با محورات، تابع ناطق $f(x)=\frac{ax+b}{cx+a}$ را دیافت نمائید.

حل: مجانب عمودی آن $x=-\frac{a}{c}$ بوده و مجانب افقی آن $f(x)=\frac{a}{c}$ بوده و محور x را در نقطه $\left(-\frac{b}{a},0\right)$ و محور y را در نقطه $\left(0\ ,\ {}^{b}\!/_{a}\right)$ قطع می نمایند.

2: گراف تابع $f(x)=\frac{1}{x}$ را ترسیم نمائید.

حل: ناحیه تعریف آن سیت تمام اعداد حقیقی است بدون $x=0$ محور x و y را قطع نمی نمایند. مجانب افقی عبارت از محور x و مجانب عمومی عبارت از محور y اند و کمیات وضعیه چند نقطه دیگر قرار ذیل است.

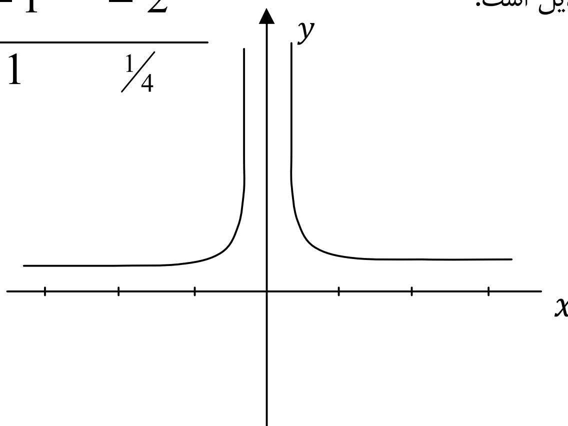
x	1	2	3	-1	-2	-3
$f(x)$	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	-1	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{3}$



3: گراف تابع $f(x)=\frac{1}{x^2}$ را ترسیم نمائید

حل: محوران را صطع نمی نمایند و مجانب عمودی آن محور y و مجانب آن محور x است و کمیات وضیعه چند دیگران قرار ذیل است.

x	1	2	-1	-2
$f(x)$	1	$\frac{1}{4}$	1	$\frac{1}{4}$



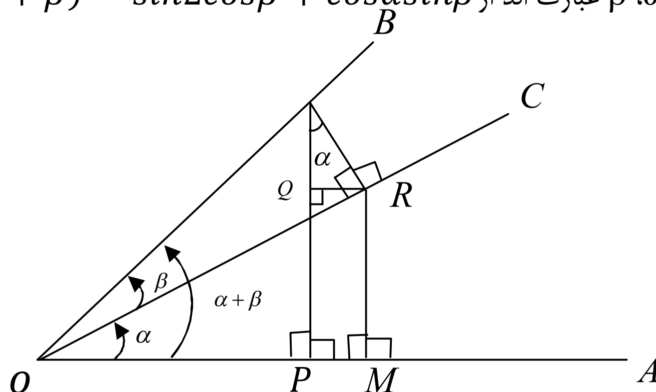
لکچر نهم

قوانین نسبت های مثلثاتی حاصل جمع وحاصل تفریق دو زاویه

اکثراً در محاسبات عملیه های مثلثاتی به نسبت های مثلثاتی مجموع یا تفاضل دو زاویه ضرورت داریم اگر α و β دو زاویه اختیاری باشند درین صورت هریکی از زاویه های $(\alpha+\beta)$ و $(\alpha-\beta)$ را بنام زاویه های حاصل جمع و حاصل تفریق دو زاویه گویند. باید متوجه بود که $sin(\alpha+\beta)$ مساوی به $sin\alpha+sin\beta$ نیست و میتوان این حقیقت را برای lnd، $Ln\beta$ و $Ln(\alpha+\beta)$ را به وضع زوایای خاص مانند 0° 30° وغیره به اثبات رساند.

1. نسبت های مثلثاتی مجموع دو زاویه: مقادیر نسبت های مثلثاتی زاویه های α و β معلوم اند میخواهیم مقادیر نسبت های مثلثاتی زاویه $\alpha+\beta$ را دریافت نماییم.

قضیه:- ساین مجموع دو زاویه معلوم α، β عبارت اند از $\sin(\alpha+\beta)=sin2cos\beta+cos\alpha sin\beta$



ثبوت: $A\hat{D}C=\alpha$، $C\hat{O}B=\beta$، $AOB=(\alpha+\beta)$ نشان داده شده اند. از نقطه D عمود های DP و DR را بالای شعاع های $\overline{OA}$ و $\overline{OC}$ رسم می نماییم.

همچنان از نقطه R عمود $\overline{RH}$ را بالای اشعه $\overrightarrow{OA}$ و عمود $\overline{RQ}$ را بالای قطعه خط DP رسم می نماییم. اکنون قیمت $\sin(\alpha+\beta)$ عبارت است از

$$\sin(\alpha+\beta)=\frac{MR}{OD}+\frac{\overline{QD}}{\overline{OD}}$$

کسر اولی را به $\frac{\overline{OR}}{\overline{OR}}$ و کسر دومی را به $\frac{\overline{DR}}{\overline{DR}}$ ضرب میکنیم

$$\sin(\alpha+\beta)=\frac{\overline{MR}}{\overline{OD}}\cdot\frac{\overline{OR}}{\overline{OR}}+\frac{\overline{QD}}{\overline{OD}}\cdot\frac{\overline{DR}}{\overline{DR}}$$

$$\sin(\alpha+\beta)=\frac{\overline{MR}}{\overline{OR}}\cdot\frac{\overline{OD}}{\overline{OR}}+\frac{\overline{QD}}{\overline{DR}}\cdot\frac{\overline{OD}}{\overline{DR}}$$

هرگاه رابطه فوق باشکل (1) تطبیق شود چنین نتیجه میشود که

$$\frac{\overline{MR}}{\overline{OR}}=\sin\alpha\,,\ \frac{\overline{OD}}{\overline{OR}}=\cos\beta\,,\ \frac{\overline{QD}}{\overline{DR}}=\cos\alpha\,,\ \frac{\overline{DR}}{\overline{OD}}=\sin\beta$$

اگر قیمت ها فوق را در رابطه اخیری وضع نماییم داریم:

$$\sin(\alpha+\beta)=\cos\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta \qquad (1)$$

ثبوت: در شکل (1) قیمت $\cos(\alpha+\beta)$ را دریافت می نماییم

$$\cos(\alpha+\beta)=\frac{\overline{OP}}{\overline{OD}}=\frac{\overline{OM}-\overline{PM}}{\overline{OD}}=\frac{\overline{OM}-\overline{QR}}{\overline{OD}}$$

$$\cos(\alpha+\beta)=\frac{\overline{OM}}{\overline{OD}}-\frac{\overline{QR}}{\overline{OD}}$$

اکنون کسر اولی را به $\frac{\overline{OR}}{\overline{OR}}$ و کسر دومی را به $\frac{\overline{DR}}{\overline{DR}}$ ضرب می نماییم

$$\cos(\alpha+\beta)=\frac{\overline{OM}}{\overline{OD}}\cdot\frac{OR}{OR}-\frac{\overline{PR}}{\overline{OD}}\cdot\frac{\overline{DR}}{DR}$$

$$\cos(\alpha+\beta)=\frac{\overline{OM}}{\overline{OR}}\cdot\frac{\overline{OD}}{\overline{OR}}-\frac{\overline{QR}}{\overline{DR}}\cdot\frac{\overline{OD}}{\overline{DR}}$$

$$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cdot\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$$

قضیه: تانجانت مجموعه دو زاویه معلوم α و β عبارت است از

$$tg(\alpha+\beta)=\frac{\dfrac{\sin\alpha\cos\beta}{\cos\alpha\cos\beta}+\dfrac{\cos\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta}}{\dfrac{\cos\alpha\cos\beta}{\cos\alpha\cos\beta}-\dfrac{\sin\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta}}=\frac{\dfrac{\sin\alpha}{\cos\beta}+\dfrac{\sin\beta}{\cos\beta}}{1-\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}\cdot\dfrac{\sin\beta}{\cos\beta}}$$

$$tg(\alpha+\beta)=\frac{tg\alpha+tg\beta}{1-tg\alpha tg\beta} \qquad (3)$$

مثال: $\sin\frac{7\pi}{12}$، $\sin120^\circ$، $\cos120^\circ$ و $tg\frac{5\pi}{12}$ را دریافت نمایید

حل:

$A=\mathbb{R}$

$$1\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}+0\cdot\frac{1}{2}=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\cos120^\circ=\cos(90^\circ+30^\circ)=\cos90^\circ\cos30^\circ-\sin90^\circ\cdot\sin30^\circ$$

$$= 0 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + 0 \cdot \frac{1}{2} = -\frac{1}{2}$$

$$tg\frac{5\pi}{12} = tg(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{6}) = \frac{tg\frac{\pi}{4} + tg\frac{\pi}{6}}{1 - tg\frac{\pi}{4} \cdot tg\frac{\pi}{6}} = \frac{1 + \frac{\sqrt{3}}{3}}{1 - 1 \cdot \frac{\sqrt{3}}{3}}$$

$$= \frac{\frac{3+\sqrt{3}}{3}}{\frac{3-\sqrt{3}}{3}} = \frac{3+\sqrt{3}}{3-\sqrt{3}}$$

مثال: $\sin 105^\circ$ را دریافت نمایید

حل:

$$105^\circ = 60^\circ + 45^\circ$$

$$\sin 105^\circ = \sin(60^\circ + 45^\circ) = \sin 60^\circ \cdot \cos 45^\circ + \cos 60^\circ \cdot \sin 45^\circ$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$$

2. نسبت های مثلثاتی تفاضل دو زاویه:

قضیه: ساین تفاضل دو زاویه α و β عبارت است از

$$\sin(\alpha - \beta) = \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha \cdot \sin\beta$$

ثبوت:- فارمول $\sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$ را بالای دو زاویه αو $(-\beta)$ تطبیق می نماییم.

$$\sin(\alpha + (-\beta)) = \sin\alpha\cos(-\beta) + \cos\alpha\sin(-\beta)$$

میدانیم که

$$\cos(-\beta) = \cos\beta$$
$$\sin(-\beta) = -\sin\beta$$

در نتیجه

$$\sin(\alpha - \beta) = \cos\alpha \cdot \cos\beta + \sin\alpha \cdot \sin\beta$$

ثبوت: به اساس قضیه قبلی داریم که

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$$

این فورمول را بالای دو زاویه α و $-\beta$ تطبیق می نماییم

$$\cos(\alpha+(-\beta))=\cos\alpha\cos(-\beta)-\sin\alpha\sin(-\beta)$$
$$\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta$$

قضیه: تانجانت تفاضل دو زاویه α و β عبارت است از

$$tg(\alpha-\beta)=\frac{tg\alpha-tg\beta}{1+tg\alpha tg\beta}$$

ثبوت: هرگاه $tg(\alpha+\beta)=\dfrac{tg\alpha+tg\beta}{1-tg\alpha\cdot tg\beta}$ را بالای دو زاویه α و $-\beta$ تطبیق می نماییم

$$tg(\alpha+(-\beta)=\frac{tg\alpha+tg(-\beta)}{1+tg\alpha\cdot tg(-\beta)}$$

میدانیم که

$$tg(\alpha(-\beta)=\frac{\sin(-\beta)}{\cos(-\beta)}=-\frac{\sin\beta}{\cos\beta}=-tg\beta$$
$$tg(\alpha-\beta)=\frac{tg\alpha-tg\beta}{1+tg\alpha+tg\beta}$$

مثال:- $\cos\dfrac{\pi}{12}$ و $\sin 150^\circ$ را دریافت نمایید

حل:

$$\cos\frac{\pi}{2}=\cos(\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{6})=\cos\frac{\pi}{4}\cdot\cos\frac{\pi}{6}+\sin\frac{\pi}{4}\sin\frac{\pi}{6}$$
$$=\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{\sqrt{6}}{4}+\frac{\sqrt{2}}{4}=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$$
$$\sin 150^\circ=\sin(180^\circ-30^\circ)=\sin 180^\circ\cos 30^\circ-\cos 180^\circ\cdot\sin 30^\circ$$
$$=0\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}-(-1)\frac{1}{2}=-(-\frac{1}{2})=\frac{1}{2}$$

مثال: $\cos 15^\circ$ را دریافت نمایید

$$15^\circ=45^\circ-30^\circ$$
$$\cos 15^\circ=\cos(45^\circ-30^\circ)=\cos 45\cdot\cos 30^\circ+\sin 45^\circ\cdot\sin 30^\circ$$
$$=\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{\sqrt{6}}{4}+\frac{\sqrt{2}}{4}=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$$

خلاصه:

$$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta$$
$$\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta$$
$$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$$
$$\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta$$
$$tg(\alpha+\beta)=\frac{tg\alpha+tg\beta}{1-tg\alpha tg\beta}$$
$$tg(\alpha-\beta)=\frac{tg\alpha-tg\beta}{1+tg\alpha tg\beta}$$

تبدیل مجموع و تفاضل نسبت های مثلثاتی دو زاویه به حاصل ضرب آن و برعکس تبدیل حاصل ضرب نسبت های مثلثاتی زاویه ها به مجموع و تفاضل آن

1- تبدیل مجموع و تفاضل نسبت های مثلثاتی زاویه ها به شکل ضرب آن: میدا نیم که

$$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta \quad (I)$$
$$\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta \quad (II)$$

اگر رابطه I و II را باهم جمع نماییم داریم :

$$\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta+\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta$$
$$\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)=2\sin\alpha\cos\beta \quad III$$

اگر $\alpha+\beta=P$ و $\alpha-\beta=Q$ فرض شود درین صورت داریم

$$\begin{array}{c} \alpha+\beta=p \\ \underline{\alpha-\beta=q} \\ 2\alpha=q+q \\ \alpha=\dfrac{p+q}{2} \end{array} \qquad \begin{array}{c} \alpha+\beta=p \\ \underline{\alpha-\beta=q} \\ 2\alpha=p-q \\ \alpha=\dfrac{p-q}{2} \end{array}$$

قیمت های فوق را در رابطه III وضع نموده داریم

$$\sin p+\sin q=2\sin\frac{p+q}{2}\cos\frac{p-q}{2}$$

اگر از رابطه I رابطه II تفریق شود داریم

$$\sin(\alpha+\beta)-\sin(\alpha-\beta)=2\cos\alpha\sin\beta$$
$$\sin p-\sin q=2\cos\frac{p+q}{2}\sin\frac{p-q}{2}$$

به همین ترتیب

$$\begin{array}{l} \sin(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta \\ \underline{\sin(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta} \\ \cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)=2\cos\alpha\cos\beta \end{array}$$

اگر رابطه های فوق را طرف به طرف جمع نماییم داریم

$$\cos p+\cos q=2\cos\frac{p+q}{2}\cos\frac{p-q}{2}$$

اگر رابطه های ذیل را طرف به طرف تفریق نماییم داریم

$$\begin{array}{l} \cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta \\ \underline{\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\cdot\sin\beta} \\ \cos(\alpha+\beta)-\cos(\alpha-\beta)=-2\cos\alpha\cos\beta \end{array}$$

$$\cos p-\cos q=-2\cos\frac{p+q}{2}\cos\frac{p-q}{2}$$

اکنون مجموع و تفاضل تانجانت دو زاویه α و β را دریافت می نماییم

$$\tan p+\tan q=\frac{\sin p}{\cos p}+\frac{\sin q}{\cos q}=\frac{\sin p\cos q+\cos p\sin p}{\cos p\cos q}$$

$$\tan p+\tan q=\frac{\sin(p+q)}{\cos p\cos q}$$

$$\tan p-\tan q=\frac{\sin p}{\cos p}-\frac{\sin q}{\cos q}=\frac{\sin p\cos q-\cos p\sin p}{\cos p\cos q}$$

$$\tan p-\tan q=\frac{\sin(p-q)}{\cos p\cos q}$$

مثال: نشان دهید که

$$\frac{\sin 7\theta+\sin 3\theta}{\cos 7\theta+\cos 3\theta}=\tan 5\theta$$

حل:

$$\frac{\sin 7\theta+\sin 3\theta}{\cos 7\theta+\cos 3\theta}=\frac{2\sin\frac{7\theta+3\theta}{2}\cos\frac{7\theta-3\theta}{2}}{2\cos\frac{7\theta+3\theta}{2}\cos\frac{7\theta-3\theta}{2}}$$

$$=\frac{2\sin 5\theta\cdot\cos 2\theta}{2\cos 5\theta\cdot\cos 3\theta}=\tan 5\theta$$

مثال: نشان دهید که $3\sin x+\sin x=2\sin 2x\cos x$

حل:

$$\sin 3x+\sin x=2\sin\frac{3x+x}{2}\cos\frac{3x-x}{2}=2\sin 2x\cos x$$

مثال: نشان دهید که $\sin 40^\circ+\sin 20^\circ=\cos 10^\circ$

$$\sin 40^\circ + \sin 20^\circ = 2\sin\frac{40^\circ + 20^\circ}{2}\cos\frac{40^\circ - 20^\circ}{2}$$

$$= 2\sin 30^\circ \cos 10^\circ = 2\cdot\frac{1}{2}\cos 10^\circ = \cos 10^\circ$$

2: تبدیل حاصل ضرب نسبت های مثلثاتی زاویه ها به مجموع و تفاضل آن: داریم که

$$\sin p + \sin q = 2\sin\frac{p+q}{2}\cos\frac{p-q}{2}$$

چون قیمت $p = \alpha + \beta$ و $q = \alpha - \beta$ است آنرا در رابطه فوق وضع می نماییم

$$\sin(\alpha+\beta) + \sin(\alpha-\beta) = 2\sin\alpha\frac{\alpha+\beta+\alpha-\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta+\alpha-\beta}{2}$$

$$\sin(\alpha+\beta) + \sin(\alpha-\beta) = 2\sin\alpha\cdot\cos\beta$$

$$\sin\alpha\cdot\cos\beta = \frac{1}{2}[\sin(\alpha+\beta) + \sin(\alpha-\beta)]$$

به همین ترتیب

$$\sin(\alpha+\beta) + \sin(\alpha-\beta) = 2\cos\alpha\sin\beta$$

$$\cos\alpha\sin\beta = \frac{1}{2}[\sin(\alpha+\beta) - \sin(\alpha-\beta)]$$

چون

$$\cos(\alpha+\beta) + \cos(\alpha-\beta) = 2\cos\alpha\cos\beta$$

$$2\cos\alpha\cos\beta = \cos(\alpha+\beta) + \cos(\alpha-\beta)$$

$$\cos\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}[\cos(\alpha+\beta) + \cos(\alpha-\beta)]$$

همچنان

$$\cos(\alpha+\beta) - \cos(\alpha-\beta) = -2\cos\alpha\cos\beta$$

$$-2\cos\alpha\cos\beta = \cos(\alpha+\beta) - \cos(\alpha-\beta)$$

$$\sin\alpha\sin\beta = -\frac{1}{2}[\cos(\alpha+\beta) - \cos(\alpha-\beta)]$$

$$\sin\alpha\cdot\sin\beta = -\frac{1}{2}[\cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha-\beta)]$$

مثال: افاده $\sin 34^\circ \sin 28^\circ = ?$

حل:

$$\sin 34^\circ \sin 28^\circ = \frac{1}{2}[\sin(34^\circ + 28^\circ) - \sin(34^\circ - 28^\circ 0] =$$
$$\sin 34^\circ \cdot \sin 28^\circ = \frac{1}{2}[(\sin 62^\circ - \sin 6^\circ)]$$

مثال: $2\cos 45^\circ \cos 15^\circ = ?$

$$2\cos 45^\circ \cos 15^\circ = \cos(45^\circ + 15^\circ) + \cos(45^\circ - 15^\circ) = \cos 60^\circ + \cos 30^\circ$$
$$= \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{1+\sqrt{3}}{2}$$

مثال: اثبات نمایید که

$$1 + \cos 2x + \cos 4x + \cos 6x = 4\cos x \cos 2x \cos 3x$$

حل:

$$1 + \cos 2x + \cos 4x + \cos 6x = 1 + (\cos 2x \cos 34x) + \cos 6x$$
$$= 1 + 2\cos 3x \cos x + \cos 6x$$
$$= (1 + \cos 6x) + 2\cos 3x \cos x$$
$$2\cos^2 3x + 2\cos 3x \cos x$$
$$= 2\cos 3x (\cos 3x + \cos x)$$
$$2\cos 3x (2\cos 2x \cos x) = 4\cos 3x \cdot \cos 2x \cdot \cos x$$

مثال: نشان دهید که

$$\frac{\sin 75^\circ - \sin 15^\circ}{\cos 75^\circ + \cos 15^\circ} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$
$$\frac{\sin 75^\circ - \sin 15^\circ}{\cos 75^\circ + \cos 15^\circ} = \frac{2\cos\frac{75+15}{2}\sin\frac{75+15}{2}}{2\cos\frac{75+15}{2}\cos\frac{75-15}{2}} = \frac{\sin 30^\circ}{\cos 30}$$
$$= tg\, 30^\circ = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

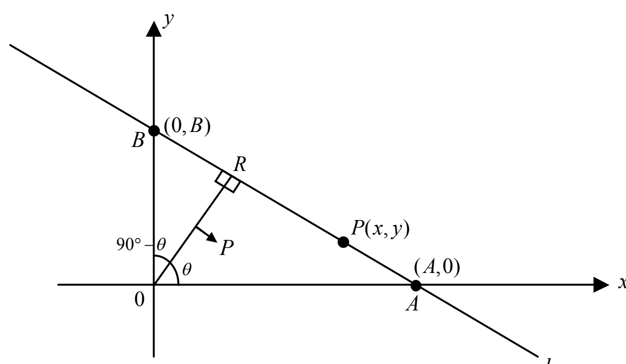
لکچر دهم

معادله نورمال یک خط مستقیم و تبدیل معادله عمومی مستقیم به شکل نورمال آن

1. معادله نورمال یک خط مستقیم: خط نورمال یک خط مستقیم عبارت از خطی است که از مبدا کمیات وضیعه گذشته و بالای خط مذکور عمود باشد.

معادله نورمال یک خط مستقیم عبارت از معادله ایست که از جنس فاصله عمودی خط داده شده از مبدا حاصل میگردد.

خط l محور x را در نقطه A و محور y را در نقطه B قطع می نمایند، اگر $P(x,y)$ یک نقطه اختیاری خط $\overline{AB}$ و خط مستقیم $\overline{OR}$ عمود بر خط l باشد، پس $\overline{OR}=P$ که خط مستقیم $\overline{OR}$ را نورمال خط l گویند و P طول نورمال میباشد.



از مثلث های قایم الزاویه $\overset{\Delta}{ORA}$ و $\overset{\Delta}{ORB}$ داریم که

$$\cos\theta=\frac{P}{\overline{OA}}\Rightarrow\overline{OA}=\frac{P}{\cos\theta}$$

$$\cos(90^\circ-\theta)=\frac{P}{OB}\Rightarrow OB=\frac{P}{\cos(90^\circ-\theta)}=\frac{P}{\sin\theta}$$

زیرا از مثلث میدانیم که $\cos(90^\circ-\theta)=\sin\theta$

چون خط مستقیم $\overline{AB}$ محور x را در نقطه (OA,O) و محور y را در نقطه (O,OB) قطع می کند، بنابرآن خط مستقیم $\overline{AB}$ عبارت است از:

$$\frac{X}{\overline{OA}}+\frac{Y}{\overline{OB}}=1$$

$$\frac{X}{\frac{P}{\cos\theta}}+\frac{Y}{\frac{P}{\sin\theta}}=1\Rightarrow\frac{\cos\theta}{P}X+\frac{\sin\theta}{P}Y=1$$

$$\cos\theta x+\sin\theta y=P$$

یا

$$\cos\theta x+\sin\theta y-P=0$$

که معادله اخیر معادله نورمال خط مستقیم l بوده که P فاصله عمودی خط از مبداء و θ زاویه مثبت بین خط نارمل و جهت مثبت محور X میباشد.

مثال: معادله خطی مستقیمی را بدست آرین که طول نارمل آن 5 واحد و با جهت مثبت محور x زاویه $30°$ را بسازد.

حل: چون فاصله عمودی خط تا مبدا 5 واحد است $(P=5)$ و $\theta=30°$ است.

لذا داریم که:

$$X\cos\theta+y\sin\theta-P=0$$
$$X\cos30°+y\sin30°-5=0$$
$$X\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)+y\left(\frac{1}{2}\right)-5=0$$
$$\sqrt{3}X+Y=10$$

مثال: اگر طول خط عمود بر یک خط مستقیم l از مبدا کمیات وضیعه مساوی به 5 واحد باشد و زاویه میل خط عمود (نورمال) $120°$ باشد میل خط مستقیم l و معادله نورمال خط مستقیم و نقطه تقاطع آن با محور Y را دریافت نمائید.

حل:

$$x\cos120°+y\sin120°=5$$
$$-\frac{1}{2}x+\frac{\sqrt{3}}{2}y=5$$

برای دریافت میل خط l معادله را به شکل $y=mx+b$ می نویسیم.

$$y=\frac{x}{\sqrt{3}}+\frac{10}{\sqrt{3}}$$

بنابرآن میل خط l عبارت از $m=\frac{1}{\sqrt{3}}$ بوده و محور y را در نقطه $\left(O,\frac{10}{\sqrt{3}}\right)$ قطع می نمایند.

2. تبدیل معادله عمومی یک خط به شکل نورمال آن: هرگاه معادله عمومی یک خط مستقیم به شکل $ax+by+c=0$ راده شده باشد، میتوانیم آنرا به شکل نورمال آن یعنی $x\cos\theta+y\sin\theta-P=0$ تبدیل نمائیم. چون هردو معادله فوق معرف عین خط می باشند، پس نسبت ضریب های x و y و اعداد ثابت هردو معادله مساوی به یک عدد ثابت مانند k شده میتوانند یعنی

$$\frac{\cos\theta}{a}=\frac{\sin\theta}{b}=\frac{-P}{c}=k$$

از رابطه فوق میتوانیم بنویسیم که $ka=\cos\theta$ و $kb=\sin\theta$، اگر هردو طرف مساوات های فوق را مربع نموده و آنها را طرف به طرف باهم جمع نمائیم درین صورت نوشته کرده میتوانیم

$$k^2a^2+k^2b^2=\sin^2\theta+\cos^2\theta$$

$$k^2\left(a^2+b^2\right)=1$$

$$k^2=\frac{1}{a^2+b^2}$$

$$k=\frac{1}{\pm\sqrt{a^2+b^2}}$$

اگر معادله $ax+by+c=0$ را در k ضرب نمائیم درین صورت داریم که

$$\frac{a}{\pm\sqrt{a^2+b^2}}x+\frac{b}{\pm\sqrt{a^2+b^2}}y+\frac{c}{\pm\sqrt{a^2+b^2}}=0$$

برای اینکه در معادله نورمال قیمت P مثبت حاصل گردد (چون P طول نورمال است همیشه باید مثبت باشد) از علامت $(\pm)$ جذور مخرج علامه انتخاب میگردد که مخالف غلامه c باشد. اگر $c=0$ باشد درین صورت خط مستقیم مورد نظر از مبدا گذشته و درین حالت چون $\theta<180$ و $\sin\theta$ قیمت مثبت را بخود گرفته علامات جذور مانند علامه b انتخاب می شود.

مثال: معادله $2x-3y+6=0$ را به شکل نورمال آن تبدیل نمائید

حل: اولاً قیمت k را بدست می آوریم. چون $a=2$ و $b=-3$ است، پس

$$k=\frac{1}{\pm\sqrt{a^2+b^2}}$$

$$k=\frac{1}{\pm\sqrt{(2)^2+(-3)^2}}=\frac{1}{\pm\sqrt{4+9}}=\frac{1}{\pm\sqrt{13}}$$

در معادله فوق $c=6$ و مثبت است، پس قیمت k را مخالف اشاره c یعنی $k\frac{1}{-\sqrt{13}}$ در نظر میگیریم و معادله فوق را در آن ضرب می نمائیم.

$$\frac{1}{-\sqrt{13}}(2x-3y+6)=0\cdot\left(\frac{1}{-\sqrt{13}}\right)$$

$$-\frac{2}{\sqrt{13}}x+\frac{3}{\sqrt{13}}y-\frac{6}{\sqrt{13}}=0$$

اگر معادله فوق را با معادله نورمال یعنی $x\cos\theta + y\sin\theta - p = 0$ مقایسه نمائیم درین صورت میتوان نوشت.

$$\cos\theta = -\frac{2}{\sqrt{13}} \;,\; \sin\theta = \frac{3}{\sqrt{13}} \;,\; P = \frac{6}{\sqrt{13}}$$

چون $\sin\theta$ مثبت و $\cos\theta$ منفی است ازینجا به این نتیجه میرسیم که نارمل در ناحیه II کمیات وضیعه واقع بوده و قیمت θ از روی جدول مثلثاتی $123°\ 40'$ است، پس معادله نورمال خط مستقیم داده شده عبارت است از

$$x\cos 123°40' + y\sin 123°40' - \frac{6}{\sqrt{13}} = 0$$

مثال: معادله $2x + 5y - 3 = 0$ را به شکل نورمال آن تبدیل نمائید

حل: چون $a = 2$ و $b = 5$ است، پس قیمت k را مثبت درنظر میگیریم یعنی

$$k = \frac{1}{+\sqrt{29}}$$

اطراف معادله فوق را در $\frac{1}{\sqrt{29}}$ ضرب می نمائیم یعنی

$$\frac{1}{\sqrt{29}}(2x + 5y - 3) = 0 \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{29}}\right)$$

$$\frac{2x}{\sqrt{29}} + \frac{5y}{\sqrt{29}} - \frac{3}{\sqrt{29}} = 0$$

یا

$$\frac{2}{\sqrt{29}}x + \frac{5}{\sqrt{29}}y - \frac{3}{\sqrt{29}} = 0$$

مرگر معادله فوق را با معادله نورمال $x\cos\theta + y\sin\theta - p = 0$ مقایسه نمائیم درین صورت داریم که $\cos\theta \frac{2}{\sqrt{29}}$ ، $\sin\theta \frac{5}{\sqrt{29}}$ بوده و طول نارمل آن $P = \frac{3}{\sqrt{29}}$ واحد میباشد. از جانب دیگر چون $\sin\theta$ و $\cos\theta$ هر دو مثبت اند، پس نارمل در ناحیه I کمیات وضعیه واقع بوده و از روی جدول مثلثاتی $\theta = 68°\ 10'$ میباشد. در نتیجه شکل نورمال معادله فوق عبارت است از

$$x\cos 68°10' + y\sin 68°10' - \frac{3}{\sqrt{29}} = 0$$

لکچر یازدهم

بعضی مفاهیم منطق در ریاضیات

اکثر علما، علم منطق را علم قوانین استنتاج تعریف میکنند، گفته میتوانم که استنتاج در منطق به معنی نتیجه گیری است. طور مثال اگر بدانیم که مجلس وزرا هر دوشنبه دایر میگردد. پس اگر گفته شود که امروز مجلس وزرا است دفعتاً نتیجه می‌گیریم که امروز دوشنبه است. ابزار کار در منطق بیانیه ها اند. از آنرو ما درین خصوص الجبر قضیه‌ها را به اختصار مورد بحث قرار می‌دهیم.

الجبر قضیه‌ها

بیانیه ها (Statements).

بیانیه‌ها (یا اظهار لفظی) را توسط P,q,r,... نشان خواهیم داد. خاصیت یک بیانیه اینست که آن درست یا غلط می‌باشد نه هردوی آن. صحت بودن و غلط بودن یک بیانیه را قیمت دروستی آن بیانیه می‌گویند. بیانیه‌ها ساده یا هم مرکب می‌باشند. بیانیه‌های فرعی ذریعه ربط دهندگان ترکیب یافته می‌باشند.

مثال‌ها

مثال اول: «احمد قد بلند و محمود تنومند می‌باشند» یک بیانیه ترکیبی (مرکب) است. که از بیانیه های فرعی «احمد قد بلند است» و «محمود تنومند می‌باشد» تشکیل یافته است.

مثال دوم: احمد کجا میرود بیانیه نیست این جمله نه صحیح است و نه هم غلط است.

مثال سوم: احمد مریض یا پیر است. یک بیانیه مرکب می‌باشد از بیانیه های فرعی «احمد مریض است» و «احمد پیر است».

خاصیت اساسی یک بیانیه مرکب این است که قیمت صحت آن کاملاً ذریعه قیمت صحت هرکدام از بیانیه های فرعی و شیوه های ربط آن که جمله مرکب را به و جود آورده است، بدست می‌آید.

اتصال (ربط) $\wedge$ (Conjunction)

دو بیانیه P و Q را ذریعه کلمه «و» ترکیب کرده میتوانیم تا یک بیانیه مرکب را به وجود آورد که آنرا اتصال بیانیه‌های اصلی گویند و سمبولیک اتصال بیانیه‌های P و q را توسط $p \wedge q$ نمایش میدهند.

مثال اول: فرض کنیم p بیانیه «باران میبارد» و q بیانیه «آفتاب می‌درخشد» باشند پس $p \wedge q$ عبارت است از «باران میبارد و آفتاب می‌درخشد»

قیمت صحت بیانیه مرکب $p \wedge q$ خاصیت ذیل را صدق می‌کند.

T_1) هرگاه Pدرست باشد و q درست باشد در آن صورت $p \wedge q$ درست است در غیر آن $p \wedge q$غلط است.

به عبارت دیگر بیانیه مرکب صحیح می‌باشد، اگر هرکدام از بیانیه‌های P و q صحیح باشد.

مثال دوم: بیانیه های ذیل را در نظر گرید.

مثال اول: کابل در افغانستان است و $2 + 2 = 5$

مثال دوم: کابل در ایران است و $2+2=4$

مثال سوم: کابل در ایران است و $2+2=5$

مثال چهارم: کابل در افغانستان است و $2+2=4$

ذریعه خاصیت T_1 تنها (4) صحیح میباشد و هرکدام از بیانیه‌های دیگران غلط است.

زیرا حد اقل یکی از بیانیه‌های فرعی آن غلط است. ما یک بیانیه صحیح را ذریعه T (True) و یک بیانیه غلط را ذریعه F (Fals) نمایش میدهیم پس شیوه مناسبی که T_1 را بیان میکند در جدول ذیل دیده میشود.

p	q	$p \wedge q$
T	T	T
T	F	F
F	T	F
F	F	F

صراحت باید داد که سطر اول یک گفتار مختصر این است که اگر P درست باشد و q درست باشد در آن صورت $p \wedge q$ درست است. به مانند این سطرهای دیگری آن معنی میدهید.

جدائی (انفصال) $\vee$ (Disjunction)

برای اینکه بیانیه جدیدی را ترتیب داده باشیم دو بیانیه p و q را میتوانیم به وسیله کلمه «یا» ترکیب داد. در مفهوم «یا» را جدائی یا انفصال دو بیانیه اصلی گویند به طور سمبولیک جدائی دو بیانیه p و q را ذریعه $p \vee q$ می‌نویسند.

مثال ها

مثال اول: فرض کنیم p چنین یک بیانیه باشد «او انگلیسی را در پوهنتون خوانده است» و قبول کنیم q بیانیه باشد که «او در امریکا زندگی کرده است» بنابران $p \vee q$ عبارت است از «او لسان انگلیسی را در پوهنتون خوانده یا او در آمریکا زندگی کرده است»

مثال دوم: چهار بیانیه ذیل را در نظر گیرید.

1) کابل در افغانستان است یا $2+2=5$
2) کابل در ایران است یا $2+2=4$
3) کابل در افغانستان است یا $2+2=4$
4) کابل در ایران است یا $2+2=5$

درین بیانیه‌ها تنها (4) غلط است. و هریکی از سه بیانیه دیگران صحیح است. قیمت های درستی (صحت) بیانیه مرکب $p \vee q$ خاصیت ذیل را صدق می‌کنند.

T_2) اگر p درست باشد یا q درست باشد در آن صورت $p \vee q$ درست می‌باشد. در غیر آن $p \vee q$ غلط می‌باشد.

به عبارت دیگر جدائی دو بیانیه غلط است تنها وقتیکه اگر هر یکی از مرکبۀ آن غلط باشد.

T_2 را در جدول ذیل می‌نویسیم:

p	q	$p \vee q$
T	T	T
T	F	T
F	T	T
F	F	F

نفی $\neg$ یا $\sim$ (Negation)

هرگاه بیانیه p داده شده باشد، یک بیانیه دیگری نفی p گفته میشود و آنرا ذریعه این نوشته که: «این غلط است که...» قبل از p تنظیم کرده میتوانیم یا اگر ممکن باشد ذریعه دخیل کردن کلمه نی (Not) در P افاده می‌کنیم.

به شکل سمبولیک نفی p را ذریعه «$\neg$ p یا $\sim p$» می‌نویسند.

مثال اول: سه بیانیه ذیل را در نظر گیریم:

1) کابل در افغانستان است
2) این غلط است که کابل در افغانستان است
3) کابل در افغانستان نیست

در این صورت (2) و هم (3) هردو نفی (1) است.

مثال دوم: بیانیه های ذیل را در نظر گیریم.

1) $2+2=5$
2) این غلط است که $2+2=5$
3) $2+2\neq 5$

درین صورت (2) و (3)نفی (1) میباشد.

قیمت صحت نفی یک بیانیه خاصیت ذیل را صدق میکند.

T_3 ، هرگاه P درست باشد در آن صورت $\neg$P غلط است هر گاه P غلط باشد در آن صورت $\neg$P درست است.

به عبارت دیگر قیمت صحت (درستی) نفی یک بیانیه همیشه متضاد قیمت صحت بیانیه اصلی میباشد.

مثال سوم: بیانیه مثال 1 را در نظر گیرید یادداشت کنید که (1) درست است و (2) و (3) نفی های آن غلط اند.

مثال چهارم: بیانیه مثال (2) را در نظر گیرید یادداشت کنید که در ان (1) غلط است و (2) و (3) درست میباشند.

T_3 را در شکل جدول چنین مینویسند.

P	$\neg$p
T	F
F	T

بیانیه های شرطیه (Conditional Statment) $p \Rightarrow q$

بسیاری بیانیه ها خاصتاً در ریاضی چنین اند که "اگر P پس q" یا "اگر P دران صورت q" این چنین بیانیه ها را بیانیه های شرطیه گویند و ذریعه $p \Rightarrow q$ نشان میدهند.

بیانیه شرطیه $p \Rightarrow q$ چنین خوانده میشود.

(a) P ، q را ایجاب میکند.

(b) P ، کافی است برای q.

(c) q ، درست است تنها اگر p درست باشد.

(d) q لازمی است برای p .

قیمت صحت بیانیه شرطیه $p \Rightarrow q$ خاصیت ذیل را صدق میکند.

T_4ـ شرطیه $p \Rightarrow q$ درست است جز انکه (مگر اینکه) q غلط باشد. به عبارت دیگر T_4 بیان میکند که یک بیانیه درست بیانیه غلط را تضمین نمیکند.

T_4ـ را به شکل جدول چنین مینویسند.

P	q	$p \Rightarrow q$
T	T	T
T	F	F
F	T	T
F	F	T

مثال ها:

1) اگر کابل در افغانستان است در آن صورت 2+2=5
2) اگر کابل در ایران است در آن صورت 2+2=4
3) اگر کابل در افغانستان باشد در آن صورت 2+2=4
4) اگر کابل در ایران باشد در آن صورت 2+2=5

درینجا تنها (1) غلط است.

شرطیه دو جانبه $p \Leftrightarrow q$

یک بیانیه خیلی معمول دیگری در ریاضیات به شکل «P اگر و تنها اگر، q»

این یک بیانیه را شرطیه دو جانبه میگویند و آنرا $p \Leftrightarrow q$ نمایش میدهند قیمت صحت بیانیه دو جانبه خاصیت ذیل را صدق میکند.

T_5ـ اگر P و q هردو عین قیمت صحت را داشته باشند در آن صورت $p \Leftrightarrow q$ درست است اگر P و q قیمت های صحت مقابل همدیگر را داشته باشند (یعنی یکی صحیح و دیگری غلط باشد) در آن صورت $p \Leftrightarrow q$ غلط است.

مثال ها:

(1)کابل در افغانستان است، اگر و تنها اگر، $2+2=5$

(2) کابل در ایران است، اگر و تنها اگر، $2+2=4$

(3) کابل در افغانستان است، اگر و تنها اگر، $2+2=4$

(4) کابل در ایران است، اگر و تنها اگر، $2+2=5$

مطابق T_5 درینجا (3) و (4) درست میباشند و (1) و (2) غلط اند.

T_5– را به شکل جدول چنین مینویسیم.

P	q	$p \Leftrightarrow q$
T	T	T
T	F	F
F	T	F
F	F	T

لکچر دوازدهم

احصائیه Statistics

و مروری بر مفاهیم اساسی احصائیه

اکثراً با تعجب می پرسند که اصلاً احصائیه چه است و چرا به خواندن آن مجبور می شویم؟ اساساً احصائیه یک کلمه عربی است چی با شمردن مسایل حیاتی مانند نفوس یک ولایت یا نفوس یک مملکت تعداد حیوانات تعداد اطفال واقعات ترافیکی ، محصول غله جات، تولد سالانه اطفال، مرگ و میر اطفال و مادران وغیره که هر کدام این موضوعات توسط ارگان های مخصوص دولتی اجرا می گردد. مثلاً در مملکت ما ریاست سجل و نفوس وزارت داخله، احصائیه مرکزی وغیره.

Statistic از کلمه لاتینی Statuc که به معنی دو ست است، گرفته شده به این معنی که احصائیه در سابق برای جمع آوری معلومات و ارقام مورد ضرورت در ست به کار می رفت اما حالا از کلمه احصائیه مفاهیم و معانی مختلف استنباط می شود. در اصطلاح احصائیه عبارت از همان روش ها و قرار داد های است که نخست معلومات، ارقام و اعداد را جمع آوری بعداً تحلیل، تخلیص و تجربه می نماید یعنی احصائیه در مرحله اول ارقام را جمع آوری در مرحلهٔ دوم انرا تنظیم و سپس انها را طوری خلاصه نماید که به آسانی تفسیر و تعبیر شود. احصائیه با محققین کمک مینمایند تا نتایج تحقیق خود را انکشاف و توسعه دهید در تحقیقات عملی میتودهای احصائیوی تنها به علوم سلوکی مانند تعلیم و تربیه روانشناسی، جامعه شناسی محدود نبوده بلکه این روش ها در تحقیقات علوم دیگر مانند زراعت، بیولوژی، اقتصاد، فزیک نیز به کار می رود طورمثال روش های احصائیوی متخصصین تعلیم و تربیه را به این قادر می سازد که در تدریس خود از روش های مختلف نتایج مفیدی را بدست بیاورد و یک فزیکدان توسط روش های احصائیوی میتواند فعالیت های ذرات اتومی را تفسیر و تعبیر نماید یک طبیب دواهای موثر و یک انجنیر زراعت میتواند توسط این روش ها کود کیمیاوی خوبتری را استعمال نماید.

حصائیه یک شاخه یی از علم ریاضی بوده و در جمله ریاضیات تطبیقی محسوب می شود. امکان دارد بعضی از قسمت های احصائیه مربوط به ریاضی نباشد مثلاً به این باید مطمئن شد که ارقام و معلومات طوری جمع آوری شود که از آن نتایج قابل اعتماد بدست آید. به ارقام و معلومات جمع شده، کود دادن در زراعت حفظ نمودن معلومات، معلومات را خلاصه کردن و قابل فهم نوشتن راپور وغیره.

از زمانیکه در جهان اجتماع بیمان آمد. از همان وقت احصائیه در خدمت بشریت بود مثلاً وقتیکه رئیس قبیله می خواست که چند نفر جنگی دارد از آن جمله چند نفر اسپ سوار است و چه تعداد وسایل جنگی دارد. به این ترتیب احصائیه برای جمع آوری معلومات در باره مرض طاعون در لندن به کار رفت. در قرن 17 و 18 قمار بازان از ریاضی دانان خواهش کردند که پرنسیب های را بمیان بیاورد تا بتواند به اساس آن در قمار چانس بیشتر را داشته باشد. برنولی و یک عالم دیگر بنام Demoirreدرین کار معروف شدند که در نتیجه آن ریاضی احتمالات را بمیان آوردند اساساً فعالیت های احصائیوی در سال 1532 در لندن شروع و بعداً در فرانسه، سویدن، دنمارک و هالند شکل عصری تری را بخود گرفت.به همین قسم علمای دیگری نیز به ترتیب در انکشاف و توسعه احصائیه کارهای علمی زیادی را انجام داده اند تا که شکل علمی امروزه را بخود اختیار کرد.

کلمات در ارقام داتا (Data) معلومات و دانش بسیاری اوقات یکی به جای دیگری به کار می رود تفاوت این اصطلاحات مربوط به این است که داتا یک شی عینی است که درجه بندی ارقام در سطح پائین قرار دارد. معلومات در سطح دوم و دانش در سطح عالی قرار دارد. یعنی داتا کدام معلومات را داده نمیتواند وقتیکه داتا به یک چیزی ارتباط داده شود معلومات می شود برای اینکه داتا به معلومات تبدیل شود باید تعبیر و تفسیر شود تا یک معنی بدهد مثلاً ارتفاع قله تیراجمیر معمولاً یک داتا است مگر مشخصات قله تیراجمیر در حقیقت یک معلومات است و بلند شدن به کلمه تیراجمیر توسط راه های خوب معلومات عملی دانش شمرده می شود.

احصائیه و تیوری احتمالات ارتباط نزدیک دارد تنها فرقی که دارد این است که در احتمالات صفات کل در جز دیده می شود یعنی توسط اصل دیدکشن (قیاس) مطالعه می شود مثلاً مطالعه یک جمعیت نتایج شاگردان توسط پارامتر های آن (اوسط) مود و میانه مطالعه می شود یا به عباره دیگر به شاگردان صنف اول وقتیکه یک حرف را تدریس می کنند نخست کلمه را به شاگردان می اموزانند و سپس حرف مورد نظر را دران شاگردان نشان می دهند.

برعکس در محاسبات احصائیه اگر یک جمعیت را مطالعه می کنند انرا توسط استقرا Induction در نظر می گیرند مثلاً در تدریس زبان به شاگردان اول حروف را به شاگردان اموختانده و سپس از روی آن کلمه سازی و جمله بندی را تدریس می کنند یعنی از جزء به کل می رود.

احصائیه از نظر توضیح و تفسیر ارقام عبارت است از

1- احصائیه توصیفی: معلومات عددی جمع شده یعنی دانش، خلاصه کردن و تنظیم ارقام را گویند اگر به صورت وسیع تر بگویم توسط محاسبات احصائیوی مشخصات اساسی ارقام و معلومات جمع شده از نظر کمی بیان می شود.
2- احصائیه استنباطی: این احصائیه عبارت از روشن های است که از روی مشخصات یک نمونه مشخصات یک جمعیت استنباط می گردد یعنی درین احصائیه از جزء به کل ارقام مطالعه می شود.
3- احصائیه تشریحی: عبارت از همان روش ها و اصول است که در تشریح و توضیح مشخصات و اوصاف یک نمونه و جمعیت به کار برده می شود اوسط میانه و مود انحراف معیاری مربوط به احصائیه تشریحی است

مطالعه جمعیت در احصائیه: در احصائیه کلمه جمعیت (Papulation) از مفهوم عادی آن و سیعتر است Papulation اصلاً نفوس را گویند ولی در احصائیه در مملکت ما جمعیت را گویند. جمعیت در زندگی روزمره از گروپ به همان افراد عبارت است که در یک وقت معین در قلمرو خاص جغرافیاوی زندگی می کنند به این ترتیب جمعیت جهان، جمعیت افغانستان و جمعیت شهر کابل از همان انسان های عبارت است که در هان قلمروها زندگی می کنند. گاه گاهی به عوض محدوده جغرافیای گروه افراد از روی صفات مشترک شان مطالعه می شود یعنی همان صفاتی که آنها را با هم ارتباط می دهند مثلاً شاگردان دارالمعلمین عالی کابل، پرسونل طبی شفاخانه ها وغیره.

جمعیت احصائیوی تنها به افراد ارتباط نمی گیرد بلکه گروپ های مشخص دیگری را نیز احتوا می نماید مثلاً حوادث، اتفاقات، جامدات ، حوادث ترافیکی وغیره هر کدام نمایندگی از یک جمعیت می کنند.

جمعیت دو نوع است یکی جمعیت محدود(Finite) و دیگری غیر محدود (Infinit)مثلاً شاگردان مکاتب ابتدائیه شهر کابل، حاصلات گندم وادی هلمند وغیره. بسیاری اوقات جمعیت تحت مطالعه محدود بوده ولی انقدر بزرگ می

باشد که عملاً میتوان آنرا بی نهایت فرض کرد مثلاً نفوس هزار ملیونی مسلمانان جهان یک جمعیت محدود بوده ولی بسیار بزرگ است که میتوان آنرا بی نهایت فرض کرد.

نمونه و نمونه گیری Simple and Sampling: اکثراً مطالعه تمام اعضای جمعیت کاری است مشکل و مصارف زیادی را ایجاب می نماید و یا عملاً غیر ممکن می باشد. مثلاً تعین IQ اطفال به سن 10 سالگی در یک جمعیت بسیار کار پرمصرف و جنجال بر انگیز است بنابرین علمای احصائیه به عوض جمعیت یک نمونه را انتخاب نموده IQشانرا می سنجد و از روی ان سلوک را محاسبه و به IQ تمام جمعیت انرا عمومیت می دهد.

اساس روش انتخاب درین است که تمام اعضای جمعیت جهان حق انتخاب یکسان را دارد.

در نمونه گیری دو طریقه معمول است یکی نموه گیری اتفاقی Random sampling و دیگری نمونه گیری منظم. در نمونه گیری اتفاقی تمام پدیده ها حق انتخاب یکسان را دارد و درحاست منظم نمونه گیری به فواصل مساوی صورت می گیرد مثلاً در یک لست افراد خانه از هر ده نام یک نام انتخاب می شود و یا در هر ده خانه یک خانه انتخاب می شود.

متحول و ثابت: صفات و خصوصیاتی که در روی آن یک جمعیت فرق می شود مانند جنس، سن، رنگ چشم، ذکاوت و حتی دارایی در بانک هر کدام متحول است که افراد یک جمعیت در یک منطقه از روی آن فرق می شود. و اصطلاح و حتی دارایی در بانک هر کدام متحول است که افراد یک جمعیت در یک منطقه از روی آن فرق می شود. و اصطلاح ثابت به همان صفت و اطلاق می شود که در تمام اعضای جمعیت یکسان می باشد.

مثال: نمرات مضمون ریاضی دو صنف یک مکتب قرار ذیل داده شده است.

82	52	81	81	80	88	84	76	75	83	72	70	97	82
77	97	97	78	86	85	76	84	84	72	83	98	73	82
75	83	72	70	97	82	82	52	81	81	80	88	76	84
76	84	72	83	98	73	82	77	82	97	97	78	86	85

احصائیه توضیحی این جدول را محاسبه می نماییم.

درین جدول نمرات شاگردان منحول آن است. نمره هر عدد مشاهده و خود شاگرد نمونه جمعیت است همچنان اعداد (نمرات شاگردان) ارقام یا داتا است اما بدون آن اگر بگویم نمره احمد 82 و نمره محمود 97 است از آن چیزی فهمیده نخواهد شد. این ارقام مشاهده است اینکه تمام شاگردان 56 نفر است که بلند ترین نمره در آن 52 و بلند ترین آن 98 است و اوسط نمرات شان 81.4 است یک معلومات می باشد که در تمام این مشاهدات رقم 82 به تعداد 7 از تمام ارقام بیشتر تکرار شده یعنی نمره 82 را هفت نفر شاگردان اخذ نموده است.

هر گاه این نمرات را از بلند ترین تا پایان ترین نمرات به ترتیب بنویسم گویند که این ارقام تنظیم شده است بعد از اینکه موضوع تمایل به مرکز و پراگندگی از مرکز را مطالعه نمودیم تحلیل آن را خواهیم دانست.

تبصره: درینجا نام اوسط را یاد اوری نمودیم بعد تر انرا به تفصیل مطالعه خواهیم کرد.

لکچر سیزدهم

توزیع دفعات

Frequency distribution

تعریف: در ست یک تعداد ارقام تکرار یک رقم را بنام دفعات (توزیع دفعات، توزیع فرکونسی) یا فرکونسی یاد می‌کنند مثلاً در سیت:

$$\{2,6,2,2,2,8,6,6,6,8,6,2,2\}$$

میتوان نوشت:

$$\sum_{i=1}^{n} X_i = 2+6+2+2+2+8+6+6+6+8+6+2+2 =$$

$$6\cdot 2+5\cdot 6+2\cdot 8$$

که در اینجا تعداد تکرار عدد 2 مساوی به 6 دفعه، تکرار عدد6 مساوی به 5 دفعه و تکرار عدد8 مساوی به 2 دفعه است ارقام عموماً به شکل جدول داده می‌شود و برای اینکه ارقام بصورت خوبتر تحلیل و تجزیه گردد آنرا از رقم پائین به بالا و یا برعکس از بالا به پائین ترتیب می‌دهند.

46	24	15	47	55	34	46	34	24
21	21	36	32	27	28	10	29	26
19	27	41	25	40	15	16	44	26
26	16	20	33	33	27	34	36	28
19	33	25	35	39	27	18	22	
17	42	38	37		33	14	59	

دیده می شود که تحلیل و تفسیر این ارقام درین نوع جدول چه قدر مشکل است و برای این هدف ارقام را از پائین به بالا ترتیب می‌دهیم.

10	10	17	22	26	28	33	36	41	51
14	14	18	22	27	29	33	36	42	55
15	16	19	22	27	29	33	37	44	
15	17	19	24	27	29	34	38	46	
16	20	20	25	27	32	34	39	46	
16	29	21	25	28	33	35	40	47	

از جدول فوق دیده می شود که بلندترین رقم و کوچکترین رقم کدام است و هر رقم چند مرتبه تکرار شده است. طورمثال رقم 46 دو دفعه و 33 چهار دفعه تکرار گردیده است. حالا این جدول را طوری می‌نویسیم که دفعات تکرار هر رقم را در پیش روی آن می‌نویسیم.

رقم x	تکراررقم F	x	f	X	f	x	f	x	f
10	1	20	1	28	2	37	1	46	2
14	1	21	2	29	3	38	1	47	1
15	2	22	2	32	1	39	1	51	1
16	2	24	1	33	4	40	1	55	1
17	1	25	2	34	2	41	1		
18	1	26	1	35	1	42	1		
19	2	27	4	36	2	44	1		

جدول فوق به شکل توزیع دفعات است. در مقابل هر رقم مرتبه تکرار آن نوشته شده است مثلاً در مقابل 33 عدد 4 و در مقابل 25 عدد2 نوشته شده است که این اعداد در حقیقت فرکونسی همان عدد را نشان می‌دهد. باید دقت کرد که مجموع تعداد دفعات یا فرکونسی باید مساوی به مجموع ارقام داده شده باشد طور مثال اگر نمرات امتحان 50 نفر شاگردان ارقام فوق باشد پس مجموع فرکونسی آن نیز باید 50 باشد توسط جدول میتوان ارقام را بصورت خوبتر توضیح، تجزیه و تحلیل نمود.

رنج یا وسعت ارقام: فرق بین بزرگترین و کوچکترین رقم ست ارقام یا اعداد داده شده عبارت از وسعت همان ارقام می‌باشد. اگر بزرگترین رقم را به x_h و کوچکترین به x_l و رنج را به R نشان دهیم درینصورت میتوان نوشت:

$$R = R_h - R_l$$

که در جدول فوق رنج ارقام عبارت است از:

$$R = 55 - 10 = 45$$

ویا اگر سیت ارقام $A = \{15,18,13,10,16,22,29\}$ را در نظر بگیریم رنج آن عبارت است از:

$$R = 29 - 10 = 19$$

میتوان ارقام جدول ذکرشده را به کلاس ها و صنف ها تقسیم نمود. در تقسیم کلاس ها کوشش شود که ارقام در هر صنف مساویانه باشد و برای این هدف تمام ارقام را از پائین ترین تا بزرگترین نوشته می‌کنیم و برای آن از تالی (چوب خط) استفاده می‌نمایم به این شکل:

ارقام	تالی شمیر	F	ارقام	تالی شمیر	F	ارقام	شمیر	F
10	I	1	26	I	1	41	I	1
11	-	-	27	III	3	42	I	1
12	-	-	28	II	2	43	I	1
13	-	-	29	III	3	44	-	-
14	I	1	30	-	-	45	-	-
15	II	2	31	-	-	46	II	2
16	II	2	32	I	1	47	I	1
17	I	1	33	IIII	4	48	-	-
18	I	1	34	II	2	49	-	-
19	II	2	35	I	1	50	-	-
20	I	1	36	II	2	51	I	1
21	II	2	37	I	1	52	-	-
22	II	2	38	I	1	53	-	-
23	-	-	39	I	1	54	-	-
24	I	1	40	I	1	55	I	1
25	II	2						

حالا اگر تعداد فرکونسی هرکلاس 5 باشد چنین خواهد شد.

صنوف ارقام	Tally تالی	F
10-14	II	2
15-19	𝍸 III	8
20-24	𝍸 I	6
25-29	𝍸 𝍸 II	12
30-34	𝍸 II	7
35-39	𝍸 I	6
40-44	IIII	4
45-49	III	3
50-54	I	1
55-59	I	1

و اگر فرکونسی هرکلاس 10 شود چنین خواهد شد:

صنوف	تالی	فرکونسی
10-19	卌 卌	10
20-29	卌 卌 卌 |||	18
30-39	卌 卌 |||	13
40-49	卌 ||	7
50-59	||	2

که در هردو جدول تعداد فرکونس 50 است و اگر در جدول قبلی از روی تالی محاسبه شود باز هم 50 می شود.

فرکونسی یک کلاس (صنف): در یک صنف یا کلاس تکرار واقعات و مشاهدات عبارت از فرکونسی است که در جدول اخری فرکونسی کلاس 39–30 مساوی به 13 است.

حدود یک صنف: در یک صنف رقم اول و رقم اخری عبارت از حدود صنف است مثلاً در صنف 39–30 رقم اولی یعنی حد پاینی آن 30 می باشد و رقم 39 حد بالای آن است.

عرض صنفی: در یک صنف عرض صنفی مساوی حاصل تفریق حد بالایی و حد پائین جمع 1 است مثلاً عرض صنفی کلاس 39–30 مساوی است.

$$(39-30)+1=9+1=10$$

وسط صنفی عبارت از نصف مجموع حد بالایی و پائینی یک صنف است مثلاً در صنف 39–30 وسط صنفی عبارت است از $\frac{30+39}{2}=\frac{69}{2}=34,5$

توزیع فرکونس نسبی: نسبت فرکونس یک کلاس و مجموع فرکونسی تمام کلاس ها عبارت از توزیع فرکونسی نسبی است مثلاً اگر جدول ذیل را در نظر بگیریم.

صوت	فرکونس
60–62	5
63–65	18
66–68	42
69–71	27
72–74	8

مجموع فرکونس های تمام کلاس ها 100 است پس فرکونس کلاس سوم عبارت است از

$$\text{فرکونس نسبی کلاس سوم} = \frac{42}{100} = 42\%$$

ولی اگر مجموع شان 100 نباشد درینصورت میتوان فیصدی را نیز تعین کرد طور مثال اگر مجموع فرکونس های کلاس ها 82 باشد درینصورت میتوان نوشت

$$\text{فرکونس نسبی کلاس اول} = \frac{5}{82} \cdot 100 = \frac{500}{82} = 6{,}1\%$$

لکچر چهاردهم

گراف های احصائیوی

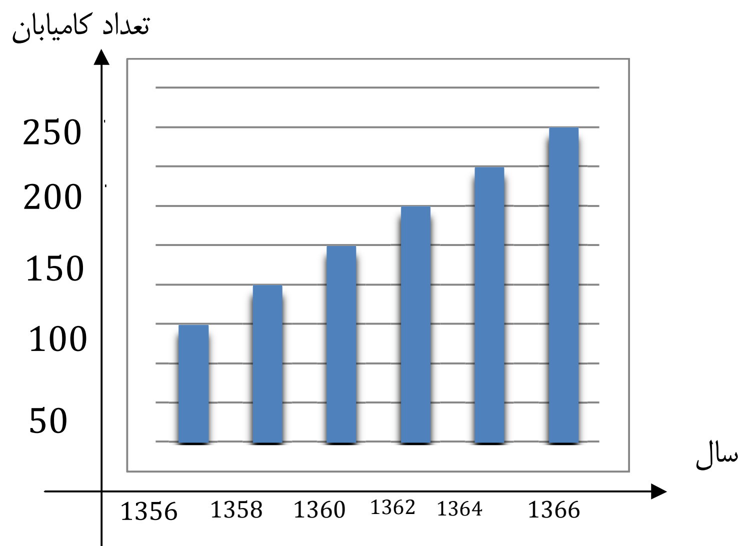
یکی از روش های که توسط آن نتایج مشاهدات و ارقام نشانداده می شود گراف های احصائیوی است. در حقیقت گراف عبارت از تصویر هندسی توزیع دفعات است که اکثراً نتایج تحقیقات علمی را به شکل خوبتر توضیح و تشریح می نماید.
گراف های که درینجا تحت مطالعه قرار می گیرد عبارت از گراف های مستطیلی (هستو گرام)و گراف های دایروی خط منکسر و منحنی الخط است. تمام گراف های که درینجا تحت مطالعه قرار می کیرد تمام آن در سیستم مختصات قایم در نظر گرفته می شود. نتایج تجارب و مشاهدات روی محور افقی (محورX) و دفعات مربوطه روی محور عمودی (محوری Y) نشانداده می شود حالا هرکدام از گراف های فوق را تحت مطالعه قرار می دهیم .

1. گراف های مستطیلی (هستوگرام)

درین نوع گراف که در ان نتایج تجارب و مشاهدات ارقام توسط یک مستطیلی باریک نشانداده می شود این مستطیل ها معمولاً به شکل عمودی (عمود بالای محورX) و یا به شکل افقی (عمود بالای محور y) رسم می شود مسافه بین دو مستطیل معمولاً به اندازه نصف عرض مستطیل می باشد و بعضاً مستطیل ها با هم اصل می باشد مثال. در جدول ذیل تعداد کامیابان لیسه های شهر بغلان. تفکیک یک سال در میان که از سال 1356 تا سال 1366 است طور ذیل داده شده است.

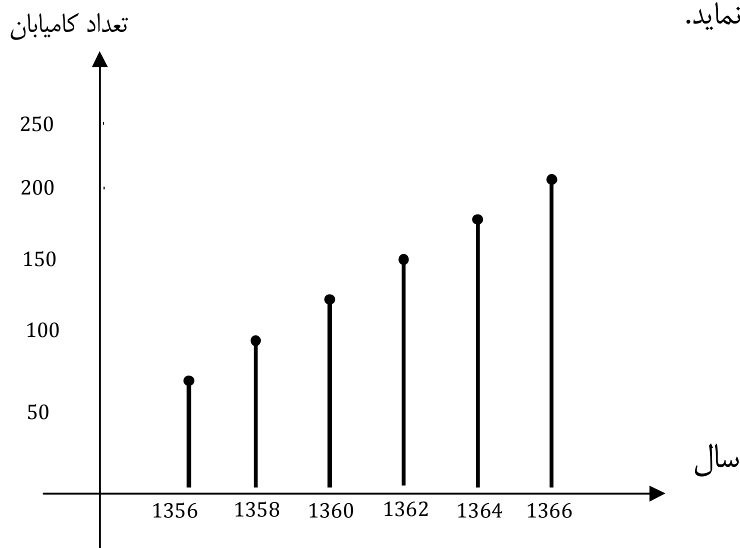
تعداد کامیابان به 1000 واحد	سال
58,1	1356
55,4	1358
76,0	1360
165,6	1362
175,3	1364
220,4	1366

گراف این جدول طوری است که وقت (سال ها) روی محور افقی و تعداد کامیابان روی محور عمودی است. باید گفت که سال ها رد نتایج مشاهدات و تعداد کامیابان از فرکونس نمایندگی می نماید.



میتوان این مستطیل ها را به شکل افقی نیز نشان داد طوریکه تعداد کامیابان را بالای محور X و سال ها را روی محور Y نشان دهیم.

2. **بارچارت:** این هم یک ارائه دیگر گرافیکی توزیع دفعات است که درینجا به عوض مستطیل ها خطوط عمودی را رسم می نماید.



تبصره: هرگاه ارقام داده شده به شکل کلاس ها باشد درینصورت روی محور افقی وسط صنفی وروی محور فرکونسی کلاس ها در نظر گر فته می شود که میتوان انرا درگراف ذیل دید.

گراف چند ضلعی: این گراف بنام گراف خط منکسر نیز یاد می شود. درین گراف روی محور افقی نقاط وسطی صنوف و روی محور عمودی فرکونس را نشان می دهند. هر جفت نقاط وسطی و فرکونس مربوط یک نقطه را در سیستم مختصات قایم ارائه می نماید. این ترتیب به تعداد صنف نقاط بدست می آید. طور مثال جدول ذیل را در نظر می گیریم.

صنوف	وسط صنفی	فرکونس
11-16	13.5	3
16-21	18.5	5
21-26	23.5	8
26-39	28.5	2
31-36	33.5	2

هرگاه به نقاط داده شده دو نقطه دیگر را علاوه نماییم. به این ترتیب

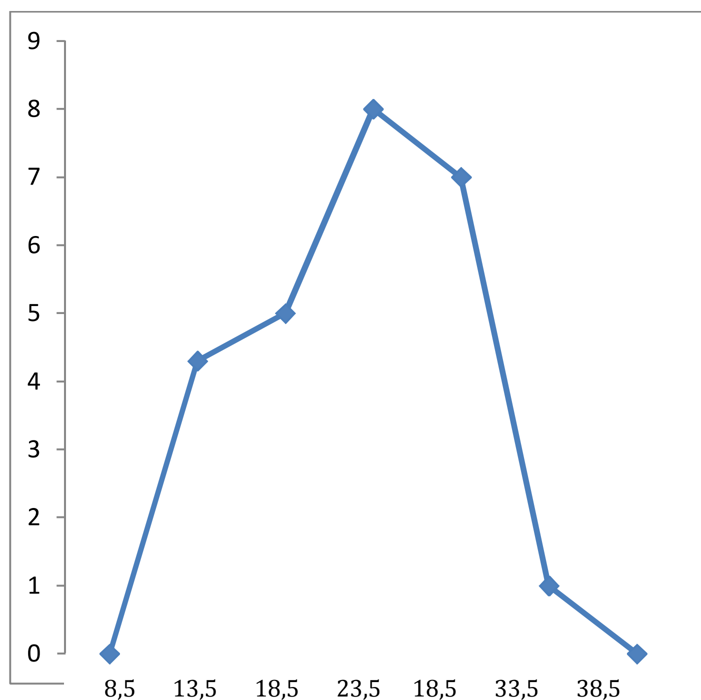
$$(x_n + c, 0), (x_1 - c, 0)$$

طوریکه x_n وسط صنفی کلاس اخری و x_1 وسط صنفی کلاس اولی است درینصورت میتوان نوشت

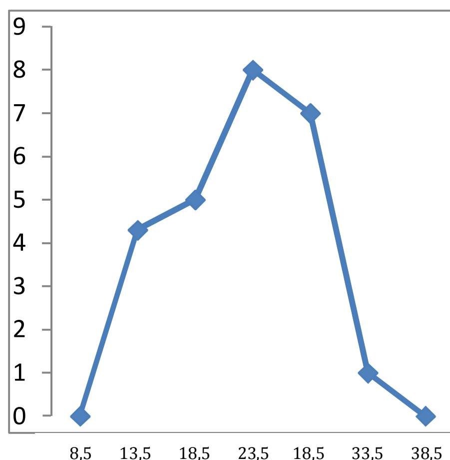
$$(x_n + c, 0) = (33{,}5 + 5, 0) = (38{,}5, 0)$$

$$(x_1 - 5, 0) = (13{,}5 - 5, 0) = (8{,}5, 0)$$

در حالیکه 5 تفاوت بین نقاط وسطی در دو صنف پی در پی است. نقاط بالا را به آن اضافه نموده داریم.



اگر گراف مستطیلی و چند ضلعی انرا رسم نمایم چنین خواهد شد



در گراف فوق دیده می شود که اگر نقاط وسطی عرض مستطیل ها را باهم وصل نماییم گراف چند ضلعی را می دهد هم چنان از روی گراف دیده می شود که مساحت تحت گراف چند ضلعی و مساحت گراف مستطیلی با هم مساوی است.

گراف دایروی: گراف دایروی را بنام گراف قطاع نیز یاد می کنند درین گراف قیمت های اجزای مختلف و انواع دیگر به مقایسه کل در قطاع های دایره در نظر گرفته می شود هر کدام را به شکل فیصدی می نویسند مرکز دایره را به زاویه 36° می گیرند و از روی آن انرا 100% محاسبه می نمایند درین دیاگرام کوشش باید کرد که اجزا را بسیار از یاد میگیرند زیرا تشخیص اجزای زیاد که به رنگ های مختلف تبارز می نماید مشکلات را بمیان می آورند.

طور مثال محصول غله جات چند ولایات افغانستان را طوری در نظر می گیریم که حاصلات آن به واحد چند تن باشد.

قطاع زاویه	حاصلات گندم	ولایات
$\frac{360\cdot 40}{120}=120^\circ$	40	کندهار
$\frac{360\cdot 45}{120}=135^\circ$	45	هرات
$\frac{360\cdot 35}{120}=105^\circ$	35	کندز

اگر بخواهیم انرا به فیصدی محاسبه نماییم از فورمول ذیل استفاده می نماییم.

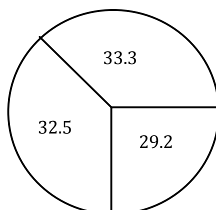
$$\begin{matrix} 360 & 100 \\ x & 1 \end{matrix} \quad => x = 3.6$$

یعنی 1% ، 3.6 درجه مطابقت می نماید که از روی ان میتوان حاصلات گندم سه ولایات متذکره را به فیصدی محاسبه نماییم.

$$x=\frac{120}{3,6}=33,3\%$$

$$x = \frac{135}{3,6} = 37,5\%$$

$$x = \frac{105}{3,6} = 29,2\%$$



تمرین

عاید فامیلی هر فامیل به 1000 واحد در جدول ذیل داده شده است.

وسط صنفی	فرکونس	عاید فامیلی به هر زر واحد
10	5	0-20
30	10	20-40
50	80	40-60
70	40	60-8
90	15	80-100

1. گراف مستطیل انرا رسم نمایند.
2. گراف چند ضلعی انرا رسم نمایند
3. هر گاه حاصلات انگور ولایات ذیل داده شده باشد (حاصلات به هزار تن)

حاصلات انگور	ولایت
50	کابل
60	پروان
40	کندهار

درینصورت گراف دایروی انرا رسم نمایند.

لکچر پانزدهم

اوسط ها Average

درین لکچر بعضی خصوصیات دیگر ارقام را تحت مطالعه قرار می دهیم چه این ارقام تصنیف شده و یا غیر تصنیف شده باشد این خصوصیات اوسط های ارقام است قبل از اینکه راجع به اوسط ها حرفی بزنیم. در مرحل اول راجع به تحقیقات علمی معلومات حاصل می نماییم.

روش تحقیق علمی اساسات عبارت از مجموعه همان قواعد و طرز العمل های است که عملیه تحقیق از روی آن اجرا می گردد این قواعد و طرزالعمل ها متشکل از قسمت های نظری و قسمت های عملی یا تطبیقی می باشد تیوری عبارت از همان اصطلاح علمی است که روابط داخلی بین اشیا را مطالعه می نمایدتیوری از تصور و خیالات یک عالم و یا اینکه از زحمات و تجارب آن بدست می آید. در تحقیق فرضیه بحیث رهنمای تحقیق اهمیت خاصی دارد مثلاً اگر بگوییم ترویج و تکثیر مواد نشه اور در بعضی از ممالک مربوط هموار بودن زمین آن منطقه است که این در حقیقت یک فرضیه می باشد و باید تحقیق روی آن صورت گیرد.

اگر در ساحه های تحقیق تمام معلومات به شکل ارقام و اعداد باشد پس موضوع تحقیق به این ارقام و اعداد محدود می شود و باید این ارقام توسط روش های احصائیوی تحقیق گردد. درین حالت دو امکان موجود است یکی مرکزیت ارقام را باید دریافت کرد انرا بنام تمایل به مرکز یاد می کنند که ان ها عبارت از اوسط (Mean) میانه (Median) و مود (Mode)است.

دومی عبارت از انتشار وارقام از مرکز است یعنی تحقیق می شود که ارقام از مرکز به کدام اندازه انحراف نموده است. درین حالت انحراف معیاری. وریانس انحراف متوسط مطالعه می شود. در مرحله اول موضوع تمایل به مرکزیت را تحت مطالعه قرار می دهیم.

1- اوسط: اوسط در حقیقت موقعیت مرکزی یک سلسله اعداد و ارقام می باشد و آن عبارت از مجموعه ارقام بر تعداد ارقام می باشد. این اوسط در حقیقت اوسط حسابی می باشد طور مثال اعداد $7,13,22,9,11,4$ اوسط حسابی اعداد عبارت است از

$$\bar{x}=\frac{7+13+22+9+11+4}{6}=\frac{66}{6}=11$$

بصورت عموم اگر $x_1, x_2, \dots, x_n$ رقم داشته باشیم درینصورت اوسط حسابی آن مساوی میشود به

$$\bar{x}=\frac{x_1+x_2+\dots+x_n}{n}=\frac{\sum_{i=1} x_1}{n}$$

2)اوسط حسابی درجات سانتی گراد ذیل را بدست ارید.

$$17c^{\circ}, 19c^{\circ}, 21c^{\circ}, 20c^{\circ}, 21c^{\circ}$$

حل:

$$\bar{x} = \frac{17+19+21+20+21}{5} = \frac{98}{5} = 19.6c^{\circ}$$

3) یک شاگرد در مضمون کیمیا سه تست داده است در اولی 82 نمره در دومی 74 و در سومی 89 نمره گرفته است در امتحان چهارم چند نمره بگیرد تا اوسط شان 85 شود.

$$\frac{82+74+89+x}{4} = \bar{x} = 85$$

$$82+74+89+x = 340$$

$$245 + x = 340$$

$$x = 340 - 245$$

$$x = 95$$

اگر ارقام تضیف شده باشد درینصورت از فورمول ذیل استفاده می نمایند.

$$\frac{\bar{x} = \sum_{j=1}^{n} f_i \cdot x_1}{n} = \frac{\sum fx}{n}$$

اوسط حسابی ارقام ذیل را بدست آرید.

11	11	12	12	13	13	13	13	13	14	14	15	15	15	16	16	16	12	18

دیده میشود که 11 دو دفعه 13 پنج دفعه . 15 سه دفعه 6 12. 14 و 16 هر کدام دو دفعه تکرار شده است که میتوان انرا در جدول نیز نوشت.

x	F	Fx
18	1	18
17	1	17
16	2	32
15	3	45
14	2	28
13	5	65
12	2	24
11	2	22

$\sum f = 18$ $\sum f_x = 251$

$$\bar{x} = \frac{\sum_{1=1}^{8} f_1 x_1}{\sum_{1=1}^{8} f_1} = \frac{10.18 + 1.17 + 2.16 + 3.15 + 2.14 + 5.13 + 2.12 + 2.11}{18} = \frac{251}{18} = 13.9$$

صنف ها	فرکونسی	نقطه وسطی	ضرب وسط صنفی و فرکونسی
0-4	0	2	0
5-9	2	7	14
10-14	11	12	132
15-19	26	17	442
20-24	17	22	324
25-29	8	27	216
30-34	6	32	192
35-39	3	37	111
40-44	2	42	84
45-49	1	47	47

$\sum f = 76$ $\sum f_x = 1612$

مشخصات اوسط: مجموع الجبری انحرافات از اوسط مساوی به صفر است یعنی اگر انحرف را به $x - \bar{x}$ نشان دهید

پس $\sum x - \bar{x} = 0$

x	$\bar{x}$	$x - \bar{x}$
10	6	4
8	6	2
6	6	0
4	6	-2
2	6	-4

$\sum x = 30, n = 5, \bar{x} = 6$

$$\sum x-\bar{x}=4+2+0+(-2)+(-4)=6+(-6)=0$$

2) اگر با هر رقم یک عدد جمع شود اوسط به اندازه همان عدد زیاد می شود

3) اگر از هر رقم یک عدد منفی شود اوسط به همان اندازه کم میشود

4)اگر هر رقم به یک عدد خلاف صفر ضرب شود اوسط نیز به همان عدد ضرب می شود.

5) اگر هر رقم به عدد خلاف صفر تقسیم شود اوسط نیز به همان عدد خلاف صفر تقسیم می شود.

مثلاً در جدول ذیل

x_2	$+2$	-2	$.2$	-2
4	6	2	8	2
4	6	2	8	2
5	7	3	10	2.5
7	9	5	14	3.5
10	12	8	20	4
$\bar{x}=6$	$\bar{x}=8$	$x=4$	$\bar{x}=12$	$\bar{x}=3$

میانه: این هم در توزیع فرکونسی یک طریقه دیگری برای پیدا کردن مرکزیت ارقام است و آن هم حد وسطی یک تعداد ارقام و اعداد می باشد که نصف ارقام آن به یکطرف و نصف باقیمانده به طرف دیگر قرار دارد و این نقطه را طور ذیل دریافت داریم.

فرضاً اگر یک سلسله ارقام داده شده باشد از همه اولتر اعداد را از پائین به بالا و یا برعکس ترتیب می نمایم.

ارقام را باید ترتیب نمود مثلاً $6,9,12,11,13,17,15$

اگر ترتیب شود چنین خواهد بود $6,9,11,12,13,15,17$

رقم وسطی این ارقام 12 است و اگر تعداد ارقام جفت باشد درینصورت میانه عبارت از نصف در حد وسطی است. مثلا:

$$5,7,11,6,9,13,14,12$$

$$5,6,7,9,11,12,13,14$$

رقم وسطی یا Med آن عبارت است:

$$Med=\frac{9+11}{2}=\frac{20}{2}=10$$

سال	تعداد جدیدالشمول
1335	347.2
1337	523.9
1339	339.2
1341	364.2
1343	411.5
1345	364.1
1347	337.6
1349	228.1
1351	295.0
1353	269.7

مثال:

اول ارقام را ترتیب می نمائیم.

$$228.3, 269.7, 295.0, 337.6, 339.4, 347.2, 364.1, 364.2, 411.5, 523.9$$

$$Med = \frac{339.4 + 347.2}{2} = \frac{686.6}{2} = 343.3$$

اگر ارقام تصنیف شده باشد درینصورت از فورمول ذیل استفاده می نماید.

$$Med = L + (\frac{N}{L} - f).\frac{C}{fm}$$

در اینجا L سرحد پائینی همان صنفی است که میانه در آن دارد.

N. مجموعه تعداد توزیع فریکونسی است.

F. مجموعه همان فریکونسی های است که قبل از L قرار دارد.

fm. فریکونسی همان صنفی است که میانه در آن قرار دارد.

C. عرض ضنفی است.

مثال:

صنف	فریکونسی f	توزیع فریکونسی جمعی
20-18	3	3
23-12	4	7
26-24	5	12
29-27	6	18
32-30	10	28
35-33	12	40
38-36	7	47
41-39	3	50
	$\sum f = 50$	

- مجموعه فریکونسی های قبل از L که در ستون سوم نوشته شده است.
- قیمت $\frac{N}{2}$ مساوی است به $\frac{50}{2} = 25$
- عرض صنفی همان صنفی باید دریافت گردد که میانه در آن قرار دارد و آن عبارت است از.

صنف پنجم: $(32-30)+1 = 2+1 = 3$

فریکونسی این صنف 10 است پس:

$$Med = L + (\frac{N}{2} - f).\frac{C}{fm}$$
$$= 29.5 + (25-18).\frac{3}{10}$$
$$= 29.5 + 7.\frac{3}{10} = 29.3 + \frac{21}{10}$$
$$= 29.5 + 2.1 = 31.6$$

نوت: سرحد پائین یک صنف مساوی به حاصل جمع حد بالایی صنف قبلی و حد پائینی صنف مورد نظر تقسیم بر 2 مثلاً سرحد صنفی صنف پنجم چنین بدست می آید.

$$|A| = \sum_{j=1}^{2} (-1)^{2+j} a_{2j} |A_{2j}| =$$

در همین سرحد بالایی یک صنف مساوی به حاصل جمع حد پائینی صنف بعدی و حد بالای صنف مورد نظر تقسیم بر 2 که در این جا سرحد بالایی صنف مورد نظر یعنی از صنف پنجم مساوی است به:

$$\frac{32+33}{2}=\frac{65}{2}=32.5$$

مشخصات میانه:

1- میانه نقطه معیاری میانه یک سلسله ارقام است که توزیع فریکونسی را به دو حصه مساوی تقسیم می نماید.
2- اشتباه معیاری از اوسط حسابی زیادتر می باشد وقتیکه توزیع فریکونسی ارقام یک چیز می باشد.
3- محاسبات الجبری در میانه صورت گرفته نمیتواند که نمیتوان میانه دو گروپ دریافت کرد.
4- اگر توزیع فریکونسی ارقام متناظر نباشد بهتر است از اوسط حسابی استفاده میشود.

3. مود Mode:

مود عبارت از همان نقطه یک سلسله ارقام است که از تمام ارقام فریکونسی بیشتری داشته باشد.

مثلاً: $11,11,12,12,12,12,12,14,15,15,16,16,13$

دیده میشود که فریکونسی عدد 12 از فریکونسی ارقام دیگر بیشتر است بنابرین مود این سلسله ارقام 12 است. هر گاه فریکونسی ارقام مساوی باشد درینصورت مود حساب شده نمیتواند. مثلاً: $2,7,16,19,20,25$ و هم چنان $2,2,2,7,7,7,16,16,16,19,19,19$ ارقام مود ندارد زیرا تمام ارقام یکنوع فریکونسی دارد امکان آن موجود است که یک سلسله ارقام دو مود و سه موده باشد. طور مثال:

$$A=\{11,11,12,12,13,13,13,14,14,14,15\}$$

درین حالت مود عبارت از اوسط حسابی قیمت های هم جوار است که یکنوع فریکونسی دارد و قیمت شان زیاد میباشد یعنی 13 و 14 یکنوع فریکونسی داشته و فریکونسی شان از تمام ارقام دیگر بیشتر است درینصورت گویند که این ارقام دو مود است یعنی:

$$ModA=\{13,14\}$$

مثال ها: $A=\{5,5,5,5\},B=\{10,20,30,40\},C=\{19,20,25,26,19\}$

درینصورت $Mod(A)=5$ تعریف نه شده $=Mod(B)$ $Mod(C)=19$ است.

هر گاه ارقام تصنیف شده باشد درینصورت برای یافتن مود ار فورمول ذیل استفاده می نمایند.

$$Mo=L_1+(\frac{\Delta_1}{\Delta_1+\Delta_2}).C$$

که درینجا

L- سرحد پائینی صنفی است که مود درآن قرار دارد.
Δ_1 - تفاوت بین فریکونسی این صنف یا صنف قبلی است.
Δ_2 - تفاوت بین فریکونسی این صنف یا صنف بعدی است.
C- عرض صنفی این صنف است.

صنوف	فریکونسی	توزیع فریکونسی جمعی
126–118	3	40
135–127	5	37
144–136	9	32
153–145	12	23
162–154	5	11
171–163	4	6
190–172	2	2

صنفی که مود در آن قرار دارد صنف چهارم است.

$$L_1 = 144.5, \Delta_1 = 12 - 9 = 3, \Delta_2 = 12 - 5 = 7, C = 9$$

$$M_o = L_1 + \frac{\Delta_1}{\Delta_1 + \Delta_2} \cdot C = 144.5 + \frac{3}{3+7} \cdot 9$$

$$= 144.5 + \frac{27}{10} = 144.5 + 2.7$$

$$= 147.2$$

مشخصات مود:

1– مود ارقام تصنیف شده در همان صنفی قرار دارد که از تمام شان فریکونسی بیشتری می دارد.

2– اگر توزیع فریکونسی به شکل نارمل میباشد درینصورت اوسط، میانه مود روی هم منطبق اند و غیر آن منطبق نمی باشد.

تمرین: جدول ذیل را در نظر بگیرید اوسط حسابی میانه و مود آنرا بدست آرید.

صنف ها	فریکونسی	وسط صنفی
20–0	5	10
40–20	10	30
60–40	80	50
80–60	40	70
100–80	15	90

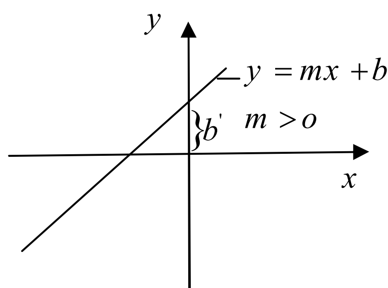
تبدیل معادله عمومی یک خط مستقیم به اشکال دیگر آن

1- تبدیل معادله عمومی یک خط مستقیم به شکل معادله معیاری آن:

شکل عمومی معادله خط مستقیم قرار ذیل است:

$$ax+by+c=0$$

در حالیکه $a^2+b^2\neq 0$ است. آنرا به شکل معادله معیاری یک خط مستقیم تبدیل می نمائیم.



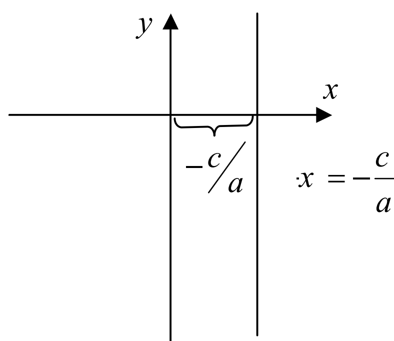
$$ax+by+c=0$$
$$by=-ax-c$$
$$y=-\frac{a}{b}x-\frac{c}{b}$$
$$y=mx+b$$

درحالیکه $m=\frac{a}{b}$ و $b'=-\frac{c}{b}$ است

معادله فوق را معادله معیاری خط مستقیم گویند که $m=-\frac{a}{b}$ میل خط مستقیم و $-\frac{c}{b}$ فاصله است که محور Y را قطع می نماید.

حالت های خصوصی:

1- اگر د رمعادله عمومی خط مستقیم $a\neq o$ و $b=0$ باشد، معادله دارای شکل ذیل است:



$$ax+c=0$$
$$ax=-c$$
$$x=-\frac{c}{a}$$

و این معادله خط مستقیم است که با محور Y موازی میباشد، و بالای محور X فاصله آن به اندازه $-\frac{c}{a}$ است.

2- اگر در معادله عمومی خط مستقیم $b\neq o$ و $c=o$ باشد، معادله دارای شکل ذیل است.

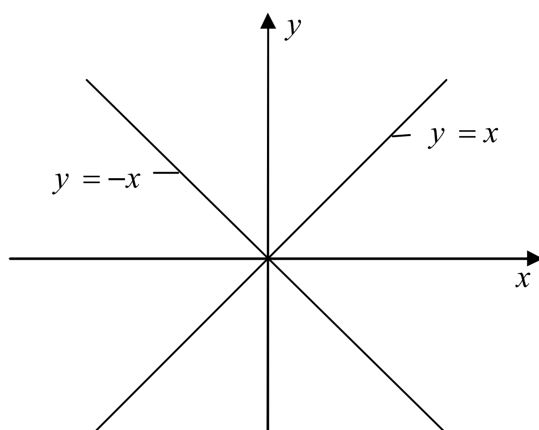
$$ax+by=0$$

$$by=-ax\Rightarrow y=-\frac{a}{b}x$$

و این $m=-\frac{a}{b}$ میل خط مستقیم است، که معادله شکل ذیل را حاصل می نماید.

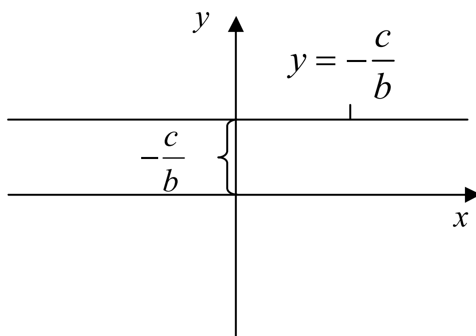
$$y=mx$$

و معادله خط مستقیم است که از مبدا مختصات قایم میگذرد. اگر $m = 1$ باشد، $y = x$ ناصف الزاویه ربع اول و سوم بوده اگر $m = -1$ باشد $y = -x$ ناصف الزاویه ربع دوم و چهارم است.



3- اگر در معادله عمومی خط مستقیم $a = 0$ و $b \neq 0$ باشد، معادله شکل ذیل را دارد.

$$by + c = 0$$
$$by = -c$$
$$y = -\frac{c}{b}$$



و این معادله خط مستقیم است که با محور x موازی میباشد و بالای محور Y فاصله آن به اندازه $-\frac{c}{a}$ است.

4- اگر در معادله عمومی خط مستقیم $b = o$ و $C = 0$ باشد در این صورت داریم:

$$ax = 0 \Rightarrow x = 0$$

و این معادله محور Y است و اگر $a = 0$ و $c = 0$ باشد معادله محور Y را ارایه می نمایند.

$$by = 0 \Rightarrow y = 0$$

مثال: معادله عمومی خط مستقیم $5x - 12y + 20 = 0$ را به شکل معیاری تبدیل نمائید.

حل:

$$-12y=-5x-20$$

$$y=\frac{5}{12}x+\frac{20}{12}=\frac{5}{12}x+\frac{5}{3}$$

میل آن $m=\frac{5}{12}$ و محور Y را در نقطه $(0,\frac{5}{3})$ قطع مینمایند.

مثال: معادله عمومی خط مستقیم $2y+3x-5=0$ را به شکل معیاری تبدیل نمائید.

حل:

$$2y+3x-5=0$$

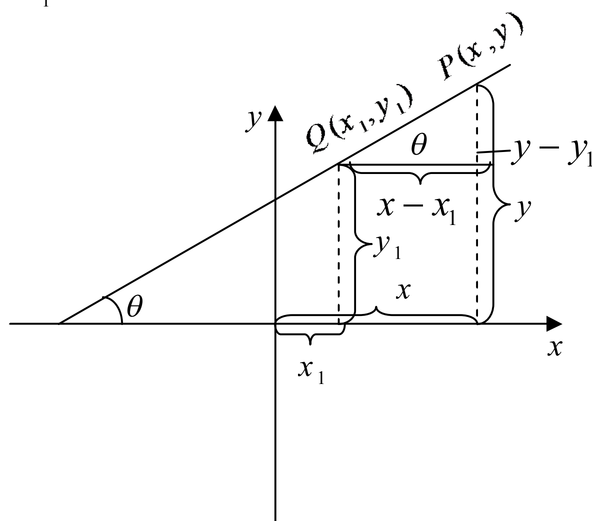
$$2y=-3x+5$$

$$y=-\frac{3}{2}x+\frac{5}{2}$$

میل آن $m=-\frac{3}{2}$ و محور Y را در نقطه $(0,\frac{5}{2})$ قطع می نمایند.

2- معادله خط مستقیمی که میل و یک نقطه آن معلوم باشد: شکل عمومی معادله خط مستقیم $ax+by+c=0$ را به معادله معیاری خط مستقیم $y=mx+b$ تبدیل نمودیم که m میل آن است. همچنان میل خط مستقیم عبارت از تانجنت زاویه است که خط مستقیم در جهت مثبت با محور ox تشکیل نمایند معادله خط L که میل آن m و از نقطه $Q(x_1,y_1)$ میگذرد دریافت می نمائیم. اگر $P(x,y)$ یک نقطه اختیاری خط مستقیم را باشد. چون نقطه $Q(x_1,y_1)$ و $P(x,y)$ بالای عین خط مستقیم واقع اند. پس میل این خط مستقیم مساوی است به:

$$tg\theta=m=\frac{y-y_1}{x-x_1}\Rightarrow y-y_1=m(x-x_1)$$



مثال: معادله خط مستقیم را دریافت نمائید که میل آن $2-$ و از نقطه 5.1 می گذرد.

حل:

$$y-y_1=m(x-x_1)$$
$$y-1=-2(x-5)$$
$$y=-2x+10+1=-2x+11$$
$$y+2x-11=0$$

مثال: معادله خط مستقیم را دریافت نمائید که میل آن $-\frac{a}{b}$ و از نقطه $(-\frac{c}{a},0)$ می گذرد.

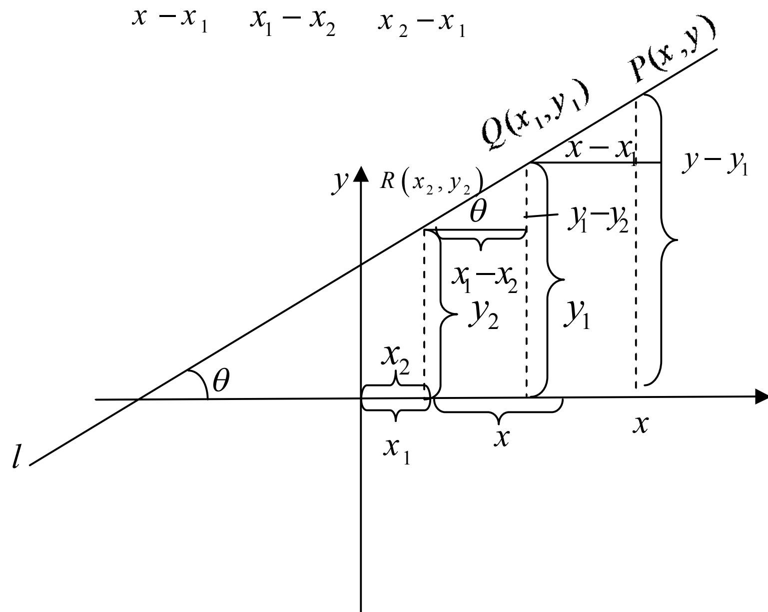
حل:

$$y-y_1=m(x-x_1)$$
$$y-0=-\frac{a}{b}(x-(-\frac{c}{a}))$$
$$y=-\frac{a}{b}x-\frac{c}{b}$$
$$by=-ax-c$$
$$ax+by+c=0$$

رابطه فوق شکل عمومی معادله خط مستقیم است.

3- معادله خط مستقیم که دو نقطه آن معلوم باشد: خط l که عمود به محور y نباشد و از نقاط $Q(x_1,y_1)$ و $R(x_2,y_2)$ می گذرد و $p(x,y)$ یک نقطه اختیاری خط L باشد چون میل خط مستقیم در هر نقطه خط باهم مساوی میباشد، پس

$$m=\frac{y-y_1}{x-x_1}=\frac{y_1-y_2}{x_1-x_2}=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$$



$$\frac{y-y_1}{x-x_1}=\frac{y2-y_1}{x2-x_1}$$

$$y-y_1=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}(x-x_1)$$

مثال: معادله خط مستقیم را دریافت نمائید که از نقاط $P_1(2,1)$ و $P_2(-6,5)$ می گذرد.

حل:

$$y - y_1 = \frac{5-1}{-6-2}(x-2)$$

$$y - 1 = \frac{4}{-8}(x-2) = -\frac{1}{2}(x-2) \ = -\frac{1}{2}x + 1$$

$$y = -\frac{1}{2}x + 1 = -\frac{1}{2}x + 2$$

$$x + 2y - 4 = 0$$

مثال: معادله خط مستقیمی را دریافت نمائید که از نقاط $P_1\left(\frac{-c}{a}, 0\right)$ و $P_2\left(0, \frac{-c}{b}\right)$ میگذرد.

حل:

$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1)$$

$$y - 0 = \frac{\frac{-c}{b} - 0}{0 + \frac{c}{a}}\left(x - \left(-\frac{c}{a}\right)\right) = \frac{\frac{-c}{b}}{\frac{c}{a}}\left(x + \frac{c}{a}\right)$$

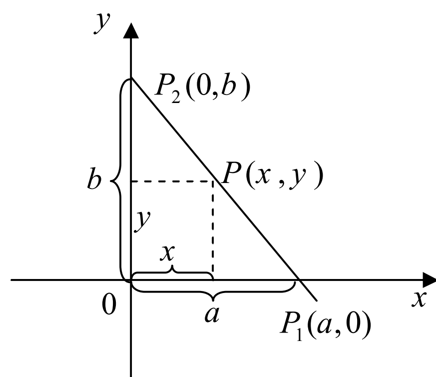
$$y = -\frac{c}{b} \cdot \frac{a}{c}\left(x + \frac{c}{a}\right) = -\frac{a}{b}\left(x + \frac{c}{a}\right) = -\frac{a}{b}x - \frac{c}{b}$$

$$by = -ax - c$$

$$ax + by + c = 0$$

معادله فوق شکل عمومی معادله خط مستقیم است.

4- معادله خط مستقیمی که نقطه تقاطع آن با محور ها معلوم باشد: اگر $P(x, y)$ یک نقطه اختیاری خط مستقیم L باشد و خط مستقیم L محور x را در نقطه $P_1(a, 0)$ و محور y را در نقطه $P_2(0, b)$ قطع نمایند. درین صورت نقاط P, P_1, P_2 بالای خط مستقیم L واقع اند با استفاده از فورمول که دو نقطه آن معلوم باشد میتوان نوشت:



$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1)$$

$$y = -\frac{b}{a}(x - a)$$

$$ay = -bx + ab$$

$$bx + ay = ab$$

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$$

مثال: معادله خط مستقیم را دریافت نمائید که محور X را در نقطه $P_1(2, 0)$ در محور Y را در نقطه $P_2(0, -4)$ قطع نمایند.

حل: $a = 2, b = -4$ میباشد.

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$$
$$\frac{x}{2}+\frac{y}{-4}=1$$
$$2x-y=4$$

مثال: معادله خط مستقیم را دریافت نمائید که محور X را در نقطه $P_1(-\frac{c}{a},0)$ و محور Y را در نقطه $P_2(0,-\frac{c}{b})$

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$$
$$\frac{x}{-\frac{c}{a}}+\frac{y}{\frac{-c}{b}}=1$$
$$\frac{ax}{-c}+\frac{by}{-c}=1$$
$$ax+by=-c$$
$$ax+by+c=0$$

قطع نمایند.

معادله فوق معادله عمومی خط مستقیم است.

حل معادله درجه دوم یک مجهوله که دارای جذور مختلط باشد.

شکل عمومی این نوع معادلات $(a \neq 0)ax^2+bx+c=0$ بوده طوریکه a,b,c اعداد ثابت اند و x مجهول (متحول) از درجه دوم میباشد. هر معادله درجه دوم یک مجهوله دارای دو جذر x_1 و x_2 میباشد.

حالت خصوصی:

1- اگر b=0 باشد معادله مذکور به معادله درجه دوم $ax^2+c=0$ تبدیل گردیده و حل آن قرار ذیل است.

$$ax^2+c=0$$
$$ax^2=-c \Rightarrow x^2=-\frac{c}{a}$$
$$x=\pm\sqrt{\frac{-c}{a}}, x_1=\sqrt{\frac{-c}{a}}, x_2=-\sqrt{\frac{-c}{a}}$$

مثال: معادله $5x^2+20=0$ را حل نمائید.

$$5x^2+20=0$$
$$5x^2=-20 \Rightarrow x^2=-\frac{20}{5}$$
$$x=\pm\sqrt{-4}=\pm\sqrt{4i^2}$$
$$x_1=2i, x_2=-2i$$
$$i^2=-1$$

درحالیکه $i^2 = -1$ است

حل معادلات یک مجهوله درجه دوم: حل آن را میتوان طوری ذیل دریافت.

$$ax^2 + bx + c = 0$$
$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0$$
$$x^2 + \frac{b}{a}x + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{c}{a} = 0$$
$$(x + \frac{b}{2a})^2 = \frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a} = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}$$
$$x + \frac{b}{2a} = \sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}}$$
$$x = -\frac{b}{a} \pm \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

اگر $\Delta = b^2 - 4ac$ وضع گردد داریم:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$$

اگر $\Delta = b^2 - 4ac$ باشد معادله دارای دو جذر مختلف العلامه حقیقی میباشد اگر $\Delta = 0$ باشد معادله دارای دو جذر مساوی حقیقی میباشد. اگر $\Delta \prec 0$ باشد معادله درست اعداد حقیقی حل ندارد لیکن در ساحه اعداد مختلط دارای دو جذر مختلط میباشد.

مثال: معادله $x^2 - 10x + 26 = 0$ را حل نمائید.

حل: $a = 1, b = -10, c = 26$ میباشد.

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-10)^2 - 4(1)(26) = 100 - 104 = -4$$
$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{+10 \pm \sqrt{-4}}{2 \cdot 1} = \frac{+10 \pm 2i}{2} = +5 \pm i$$
$$x_1 = +5 + i, x_2 = 5 - i$$

مثال: معادله $4x^2 + 4ix + 15 = 0$ را حل نمائید.

حل:

$$\Delta = b^2 - 4ac = (4i)^2 - 4(4)(15) = 16i^2 - 16.15$$
$$= -16 - 240 = -256 \prec 0$$
$$x = \frac{-4i \pm \sqrt{-256}}{2 \cdot 4} = \frac{-4i \pm \sqrt{i^2 \cdot 256}}{8} = \frac{-4i \pm 16i}{8}$$
$$x_1 = \frac{-4i + 16i}{8} = \frac{+12i}{8} = \frac{3}{2}i$$
$$x_2 = \frac{-4i - 16i}{8} = \frac{-20i}{8} = -\frac{5}{2}i$$

مثال: معادله درجه دوم را دریافت نمائید که جذر های آن $(3+2i)$ و $(3-2i)$ باشد.

حل: فرضاً $x_1 = 3+2i \, , x_2 = 3-2i$ باشد درین صورت داریم:

$$(x-x_1)(x-x_2)=0$$

$$x^2 - xx_2 - x_1x + x_1x_2 = 0$$

$$x^2 - (x_1+x_2)x + x_1x_2 = 0$$

$$x_1 + x_2 = 3+2i+3-2i = 6$$

$$x_1 \cdot x_2 = (3+2i)(3-2i) = 9-6i+6i+4i^2$$

$$x_1 \cdot x_2 = 9+4 = 13$$

امتحان:

$$x^2 - 6x \quad 13 \quad 0$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = 36 - 4(1)(13) = 36-52 = -16$$

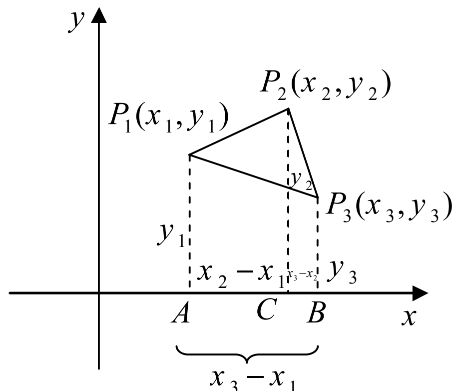
$$x_{1,2} = \frac{+6 \pm \sqrt{-16}}{2} = \frac{6 \pm \sqrt{(-1)16}}{2} = \frac{6 \pm \sqrt{i^2 16}}{2} = \frac{6 \pm 4i}{2}$$

$$x_1 = 3+2i \, , x_2 = 3-2i$$

دریافت مساحت مثلث به طریقه های مختلف

1- دریافت مساحد مثلث در صورت که کمیات روس آن داده شده باشد:

اگر $(\cos ec)$ راس های مثلث $\overset{\Delta}{p_1p_2p_3}$ باشد طوریکه در شکل مشاهده می شود بالای محور X سه خط عمود $\overline{P_1A}, \overline{P_2C}, \overline{P_3B}$ را رسم می نمائیم.



برای بدست آوردن مساحت مثلث $\overset{\Delta}{p_1p_2p_3}$ از مساحت مضلع $AP_1P_2P_3B$ مساحت ذوذنقه AP_1P_3B را تفریق می نمائیم:

مساحت مضلع متشکل از دو ذوذنقه AP_1P_2C و CP_2P_3B است و همچنان میدانیم که مساحت ذوذنقه مساوی است به نصف مجموع دو ضلع موازی ضرب فاصله بین دو ضلع موازی (ارتفاع ذوذنقه).

مساحت مثلث $\overset{\Delta}{P_1P_2P_3}$ =(مساحت ذوذنقه P_1ACP_2 + مساحت ذوذنقه P_1, AP_2, C) − (مساحت ذوذنقه AP_1P_3B)

$$P_1\overset{\Delta}{P_2}P_3 = \frac{1}{2}(|\overline{P_1A}| + |\overline{P_2C}|)(|\overline{AC}|) + \frac{1}{2}(|\overline{P_2C}| + |\overline{P_3B}|)(|\overline{BC}|$$

$$-\frac{1}{2}(|\overline{AP_1}| + |\overline{BP_3}|)(|\overline{AB}|)$$

$$= \frac{1}{2}(y_1 + y_2)(x_2 - x_1) + \frac{1}{2}(y_2 + y_3)(x_3 - x_2) - \frac{1}{2}(y_1 + y_3)(x_3 - x_1)$$

$$S = P_1\overset{\Delta}{P_2}P_3 = \frac{1}{2}(y_1x_2 - y_1x_1 + y_2x_2 - y_2x_1 + y_2x_3 - y_2x_2 + y_3x_3 - y_3x_2$$

$$-y_1x_3 + y_1x_1 - y_3x_3 + y_3x_1)$$

$$S = \frac{1}{2}(y_1x_2 - y_2x_1 + y_2x_3 - y_3x_2 - y_1x_3 + y_3x_1)$$

$$S = \frac{1}{2}[x_1(y_3 - y_2) + x_2(y_1 - y_3) + x_3(y_2 - y_1)]$$

مثال: مساحت مثلثی را دریافت نمائید که راس های آن نقاط $P_1(-2,1), P_2(1,4)$ و $P_3(4,2)$ باشند.

حل: چون $x_1 = -2, y_1 = 1, x_2 = 1, y_2 = 4, x_3 = 4, y_3 = 2$ می باشند لذا میتوانیم مساحت مثلث را توسط فورمول ذیل محاسبه نمائیم.

$$S = \frac{1}{2}[x_1(y_3 - y_2) + x_2(y_1 - y_3) + x_3(y_2 - y_1)]$$

$$S = \frac{1}{2}[-2(2-4) + 1(1-2) + 4(4-1)]$$

$$S = \frac{1}{2}[-2(-2) + 1(-1) + 4(3)] = \frac{1}{2}[+4 - 1 + 12] = \frac{15}{2}$$

$$S = 7.5$$

مثال: اگر $P_1(4,-5), P_2(5,-6), P_3(3,1)$ راس های یک مثلث باشند مساحت این مثلث را دریافت نمائید.

حل: چون $y_1 = -5, x_1 = 4, y_2 = -6, x_2 = 5, y_3 = 1, x_3 = 3$ میباشند لذا مساحت مثلث $P_1\overset{\Delta}{P_2}P_3$ قرار ذیل است:

$$S = \frac{1}{2}[x_1(y_3 - y_2) + x_2(y_1 - y_3) + x_3\ (y_2 - y_1)]$$

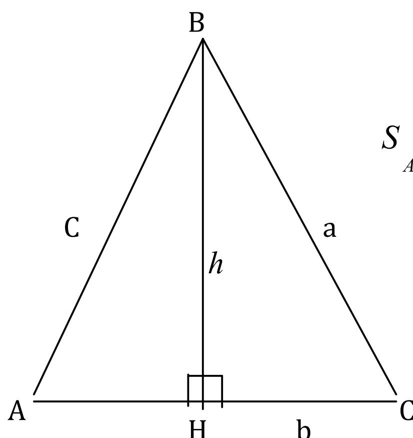
$$S = \frac{1}{2}[4(1+6)+5(-5-1)+3(-6+5)]$$
$$S = \frac{1}{2}[28-30-3]$$
$$S = \frac{1}{2}(-5) = -2.5$$
$$S = |-2.5|$$
$$S = 2.5$$

2: مساحت مثلث از جنس دو ضلع و زاویه بین این دو ضلع:- مثلث $A\overset{\vartriangle}{B}C$ را در نظر میگیریم و از راس B ارتفاع $\overline{BH}$ را بر ضلع ACرسم می نمائیم. چون $\sin A = \frac{\overline{BH}}{c} = \frac{h}{c}$ در نتیجه $h = C\sin A$می شود.

از هندسه می دانیم که مساحت یک مثلث مساوی است به $S = \frac{\text{ارتفاع x قاعده}}{2}$

2

$$S_{A\overset{\vartriangle}{B}C} = \frac{b.h}{2}$$
$$S_{A\overset{\vartriangle}{B}C} = \frac{1}{2}b.cSinA$$



به شکل مثابه اگر از راس های A وC ارتفاع را رسم نمائیم میتوان نوشت.

$$S_{A\overset{\vartriangle}{B}C} = \frac{1}{2}ac\sin B$$
$$S_{A\overset{\vartriangle}{B}C} = \frac{1}{2}ab\sin C$$

مثال:- مساحت مثلثی را دریافت نمائید که طول ضلع $a = 3{,}5cm$ و $C = 6cm$ بوده و وسعت زاویه $\hat{B} = 47{,}5^\circ$

حل:
$$S = \frac{1}{2}ac\sin B$$
$$S = \frac{1}{2}.3{,}5.6cm.\sin 47{,}5^\circ$$

از جدول مثلثاتی میدانیم که

$$\sin 47{,}5^\circ = 0.7372$$

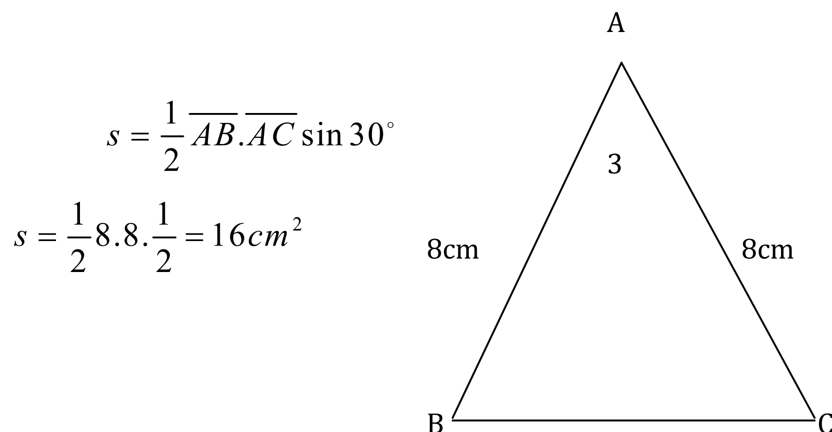
$$s = \frac{1}{2}.35cm.6cm.0.7372$$

$$s = 10,5cm.0,7372 = 7,74cm^2$$

مثال:- در مثلث متساوی الساقین $A\hat{B}C$ اگر $\overline{AB} = \overline{AC} = 8cm$ و زاویه $\hat{A} = 30^\circ$ باشد، درین صورت مساحت مثلث را دریافت نمائید.

$$s = \frac{1}{2}\overline{AB}.\overline{AC}\sin 30^\circ$$

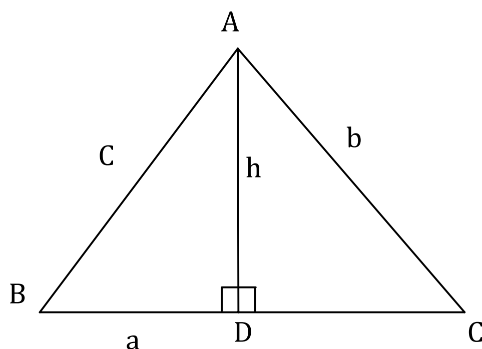
$$s = \frac{1}{2}8.8.\frac{1}{2} = 16cm^2$$



قضیه کوسین:- در هر مثلث (حاده الزاویه، قایم الزاویه و منفرج الزاویه) بین اضلاع و زوایای مثلث رابطه ذیل وجود دارد.

$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}, \cos B = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac}, \cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$$

ثبوت:- در مثلث حاده الزاویه $A\hat{B}C$ ارتفاع مربوط راس A را رسم نموده از مثلث های قایم الزاویه $B\hat{O}A$ و $A\hat{D}C$ داریم.



1

$$c^2 = \overline{AD}^2 + \overline{BD}^2$$

$$\overline{BD} = a - \overline{DC}$$

$$\overline{AD}^2 = b^2 - \overline{DC}^2$$

قیمت های فوق را در رابطه (1) وضع می نمائیم.

$$c^2 = b^2 - \overline{DC}^2 + (a - \overline{DC})^2$$

$$c^2 = b^2 - \overline{DC}^2 + (a^2 - 2a\overline{DC} + \overline{DC}^2)$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2a\overline{DC}$$

(2)

همچنان از مثلث قایم الزاویه $A\hat{D}C$ داریم.

$$\cos C = \frac{\overline{DC}}{b} \Rightarrow \overline{DC} = b\cos C$$

قیمت $\overline{DC}$ را در رابطه (2) وضع می نمائیم.

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C$$

$$2ab\cos C = a^2 + b^2 - c^2$$

$$\cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$$

به شکل مثابه میتوان دریافت که $\cos A = \dfrac{b^2 + c^2 - a^2}{2ab}, \cos B = \dfrac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac}$

دریافت مساحت مثلث از جنس سه ضلع آن (فورمول هیرون):- برای دریافت مساحت مثلث که سه ضلع آن معلوم باشد اولاً ساین و کوسین نصف الزاویه را از جنس طول اضلاع مثلث به دست می آوریم. در هر مثلث $A\hat{B}C$ رابطه های ذیل صدق می نمایند.

$$\sin A/2 = \sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{bc}}, \sin B/2 = \sqrt{\frac{(p-a)(p-c)}{ac}}, \sin C/2 = \sqrt{\frac{(p-a)(p-b)}{ab}}$$

درحالیکه a,b,c اضلاع مثلث و P نصف محیط مثلث میباشد. $\left(p = \dfrac{a+b+c}{2}\right)$ همچنان میدانیم که

$$\sin A/2 = \sqrt{\frac{(1-\cos A}{2}}, \sin B/2 = \sqrt{\frac{1-\cos B}{2}}, \sin C/2 = \sqrt{\frac{1-\cos c}{2}}$$

برای ثبوت رابطه اول میتوان بنویسیم که

$$\sin A/2 = \sqrt{\frac{1-\cos A}{2}}$$

از فقیه کوسین میدانیم که $\cos A=\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$

قیمت Cos A را در رابطه اخیر وضع می نمائیم.

$$\sin \frac{A}{2}=\sqrt{\frac{1-\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}}{2}}=\sqrt{\frac{\frac{2bc-b^2-c^2+a^2}{2bc}}{2}}$$

$$\sin \frac{A}{2}=\sqrt{\frac{2bc-b^2-c^2+a^2}{4bc}}=\sqrt{\frac{a^2-(b-c)^2}{4bc}}$$

$$\sin \frac{A}{2}=\sqrt{\frac{(a+b-c)(a-b+c)}{4bc}}$$

چون $a+b+c=2p$ میباشد درین صورت داریم:

$$a+b+c-2b=2p-2b$$

$$a+c-b=2(p-b)$$

همچنان $a+b+c-2c=2p-2c$

$$a+b-c=2(p-c)$$

قیمت های $a+b-c$ و $a-b+c$ را در رابطه اخیر عوض می نمائیم.

$$Sin \frac{A}{2}=\sqrt{\frac{2(p-b).2(p-c)}{4bc}}=\sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{bc}}$$

به شکل مثابه میتوانیم $\sin \frac{B}{2}$ و $\sin \frac{C}{2}$ را بدست آریم.

نسبت های مثلثاتی $\cos \frac{A}{2}$، $\cos \frac{A}{2}$ و $\cos \frac{C}{2}$ را از جنس طول اضلاع مثلث نیز دریافت می نمائیم.

$$\cos \frac{A}{2}=\sqrt{\frac{p(p-a)}{bc}},\cos \frac{B}{2}=\sqrt{\frac{p(p-b)}{ac}},\cos \frac{C}{2}=\sqrt{\frac{p(p-c)}{ab}}$$

ثبوت رابطه اول: میدانیم که $\cos \frac{A}{2}=\sqrt{\frac{1+\cos A}{2}}$

به اساس قضیه کوساسین داریم.

$$\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$$

$$\cos \frac{A}{2}=\sqrt{\frac{1+\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}}{2}}=\sqrt{\frac{\frac{2bc+b^2+c^2-a^2}{2bc}}{2}}$$

$$\cos \frac{A}{2}=\sqrt{\frac{(b+c)^2-a^2}{2bc}}=\sqrt{\frac{(b+c-a)(b+c+a)}{2bc}}$$

$$b+c+a-2a=2p-2a$$

$$b+c-a=2(p-a)$$

$$\cos \frac{A}{2}=\sqrt{\frac{2(p-a).2p}{4bc}}=\sqrt{\frac{p(p-a)}{bc}}$$

به همین قسم میتوان $\cos \frac{B}{2}$ و $\cos \frac{C}{2}$ را دریافت نمود.

اکنون $SinA$, $\sin B$ و $\sin C$ را با استفاده از فورمول های فوق دریافت می نمائیم.

$$\sin A=2\sin \frac{A}{2}.\cos \frac{A}{2}$$

$$\sin A=2\sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{bc}}.\sqrt{\frac{p(p-a)}{bc}}$$

$$\sin A=\frac{2}{bc}\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

$$\sin B=\frac{2}{ac}\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

$$\sin C=\frac{2}{ab}\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

3: دریافت مساحت مثلث $\overset{\Delta}{ABC}$ از جنس طول اضلاع: میدانیم که

$$\sin A=\frac{2}{bc}\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

$$\sin A=\frac{h}{c}$$

$$h=c\sin A$$

مساحت مثلث $s=\frac{1}{2}b.h$

$$s=\frac{1}{2}bc\sin A$$

$$s=\frac{1}{2}bc\frac{2}{bc}\sqrt{p(p-a)(p-b)}(p-c)$$

$s=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$ مساحت مثلث $\hat{ABC}$ فورمول فوق را بنام فورمول هیرون نیز یاد می نمایند.

از مقایسه مساوات فوق میتوان نوشت:

$$\sin A=\frac{2}{bc}.s=\frac{2\cdot S}{bc},\sin B=\frac{2\cdot S}{ac},\sin C=\frac{2\cdot S}{ab}$$

مثال: اگر اضلاع یک مثلث $b=24cm, a=18cm$ و $c=30cm$ باشد مساحت این مثلث را دریافت نمائید.

حل: $p=\frac{a+b+c}{2}=\frac{18+24+30}{2}=36cm$

$$S=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

$$S=\sqrt{36(36-18)(36-24)(36-30)}=\sqrt{36\cdot 18\cdot 12\cdot 6}=216cm^2$$

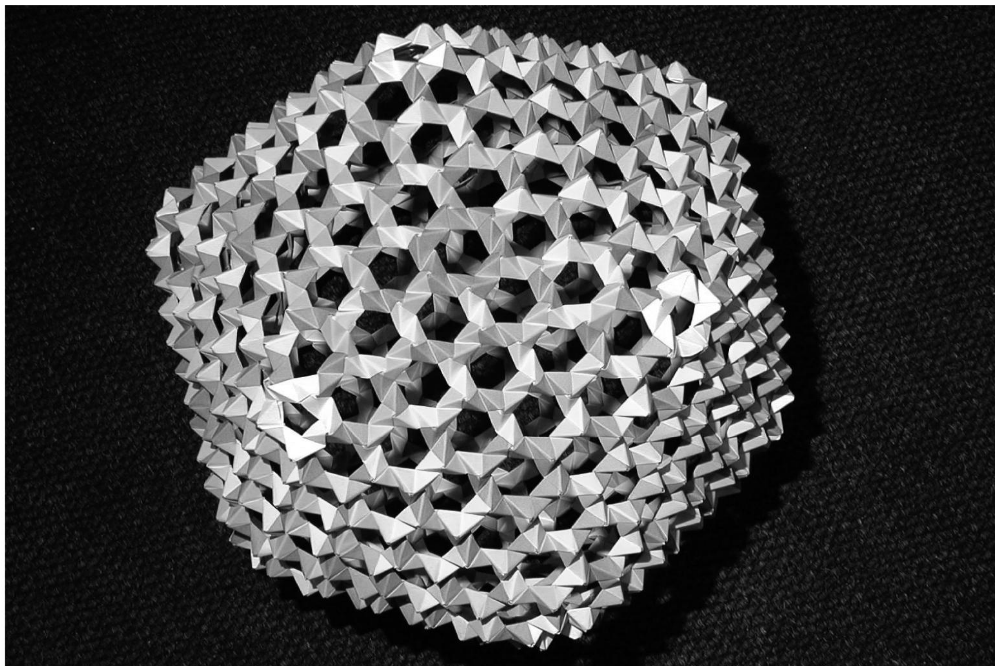
مثال:- مساحت مثلثی را دریافت نمائید که طول اضلاع آن $b=42,3cm, a=29,7cm$ و $c=38,4cm$ باشد.

حل: $p=\frac{a+b+c}{2}=\frac{29,7+42,3+38,4}{2}=55,2$

$$S=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}=\sqrt{55,2(55,2-29,7)(55,2-42,3)(55,2-38,4)}$$

$$S=\sqrt{55.2(25.5)(12.9)(16.8)}$$

$$S=552cm^2$$



ریاضی صنف یازد هم

شامل دروس انتخابی صنف 11 نصاب جدید تعلیمی

پلان لکچر ها

غرض سهولت برای ترینگ و با در نظرداشت محتوی مواد، شکل عمومی پلان ارائه کردن جلسات ریاضی صنوف 11 و 12 طور ذیل در نظر گرفته شده است که متحدالمال برای همه جلسات قابل اجرا میباشد.

موضوع: ....

هدف: تصحیح، تکمیل و توضیح مطالب مربوط این بحث در کتاب درسی ریاضی .

دو تن از جمله شاملین تحت رهنمایی ترینر تعیین و آماده گردیده تا هر یک شان نیم یک لکچر را (نصف محتوی مواد ممد در 45 دقیقه) به شاملین عرضه نمایند.

ارایه کردن لکچر:

بخش اول لکچر (45 دقیقه):

1. در شروع معمولاً برای 20 دقیقه موضع رااز روی مواد ممد تشریح و توضیح نماید.
2. بعداً برای 15 ال 20 دقیقه بحث صنفی یا در گروپها را جع به موضوع بحث شده، یا حل مثالها از مواد ممد و یا هم شاملین این موضوعات و مسایل را در کتاب درسی تطبیق مینمایند و مسایل و ابهامات باقی مانده شانرا دریافت کرده با ترینر در میان میگذارد.
3. در اخر برای 5 الی 10 دقیقه از طرف ترینر نتیجه گیری و توضیح به سوالات شاملین صورت میگیرد.

بخش دوم لکچر (45 دقیقه):

بخش دوم لکچر بهعین ترتیب از طرف استاد دوم به پیش برده میشود.

لکچر اول

معادلات مثلثاتی

معادله مثلثاتی: هرگاه دو افاده مثلثاتی در حالت مساوات قرار داشته باشد، طوریکه برای بعضی از قیمت های معین زوایا مساوات صدق نمایند، معادله مثلثاتی نامیده میشود.
یا معادله اقلاً دارای یک نسبت مثلثاتی مجهول باشد معادله مثلثاتی گفته می شود و مانند معادلات الجبری به حل آن پرداخته و زاویه مجهول مربوط را دریافت می نمائیم.
مانند معادله $2\sin x=\sqrt{3}$ که به قیمت های

$$x=\frac{\pi}{3}\ ,\ \ \frac{2\pi}{3}\ ,\ \ \frac{7\pi}{3}\ \ \ \frac{8\pi}{3}\ ,\ldots,$$

دو طرف تساوی صدق می نمایند.
جذر یا جواب معادله: جذر یا جواب معادله قیمت های از زاویه مجهول است که صحت و درستی تساوی را با تطبیق قیمت ها آن بر قرار می شود، مقصود از حل معادله مثلثاتی دریافت تمام حل های آن معادله است. مثلاً در معادله $2\sin x-\sqrt{3}=0$ جواب ها عبارت اند از $x=2k\pi+\frac{\pi}{3}$ یا $x=2k\pi+\frac{2\pi}{3}$.
حل معادله های مثلثاتی: برای حل یک معادله مثلثاتی به کمک رابطه های مثلثاتی و قوانین الجبری به ترتیب آنرا به معادله های ساده ترتبدیل نموده که تابه یکی از صورت های ذیل تبدیل گردد.

1. حالت اول: $\sin x=a\quad (a\sin\alpha+b=0)$

در حالیکه $-1\leq a\leq 1$ است. فرضاً قیمت x مساوی به α باشد درین صورت

$$\sin x=\sin\alpha$$

و قیمت های x از رابطه های مانند $x=2k\pi+\alpha$ و $x=2k\pi+(\pi-\alpha)$ محاسبه میگردد.
مثال: ست حل های معادله مثلثاتی $2\sin x-1=0$ را دریافت نمائید.
حل: معادله مثلثاتی از نوع حالت اول است.

$$2\sin x-1=0$$
$$2\sin x=1$$
$$\sin x=\frac{1}{2}$$
$$\sin x=\sin\frac{\pi}{6}\sin 30^0$$

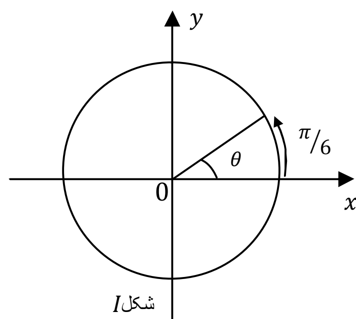
در مثال فوق بی نهایت زوایا وجود دارد که $\sin$ آن $\frac{1}{2}$ است، کوچکترین زاویه آن $\frac{\pi}{6}$ است.

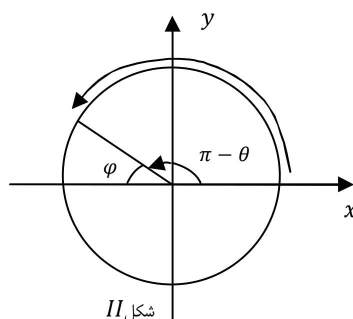
اکنون در دایره مثلثاتی (شکلI) همان زاویه های را دریافت می نمائیم که $\sin$ آن $\frac{1}{2}$ است.

$$x=\frac{\pi}{6}\ ,\ 2\pi+\frac{\pi}{6}\ ,\ 4\pi+\frac{\pi}{6}\ ,\ \ldots,\ 2k\pi+\frac{\pi}{6}\ ,\quad k\in\mathbb{Z}$$

در نتیجه $x=2k\pi+\frac{\pi}{6}$ حل معادله است و ست حل های آن

$$s_1=\left\{2k\pi+\frac{\pi}{6}\ \diagup\ k\in\mathbb{Z}\right\}$$





در دایره مثلثاتی دوم (شکلII) از رابطه $(\pi-\theta)$ همان زاویه های را دریافت می نمائیم که $\sin$ آن $\frac{1}{2}$ باشد.

$$x=\pi-\frac{\pi}{6}\ ,\ 3\pi-\frac{\pi}{6}\ ,\ 5\pi-\frac{\pi}{6}\ ,\ \ldots\ ,\ (2k+1)\pi-\frac{\pi}{6}\ ,\ k\in\mathbb{Z}$$

در نتیجه $x=(2k+1)\pi-\frac{\pi}{6}$ حل معادله است و ست حل های آن

$$s_2=\left\{\pi-\frac{\pi}{6}\ ,\ 3\pi-\frac{\pi}{6}\ ,\ 5\pi-\frac{\pi}{6}\ ,\ \ldots\ ,\ (2k+1)\pi-\frac{\pi}{6}\ ,\ k\in\mathbb{Z}\right\}$$

ست های s_1 و s_2 رامیتوان طوری ذیل نوشت (حل عمومی)

$$s_1\cup s_2=\left\{x\,\middle|\,x=2k\pi+\frac{\pi}{6}\quad ,\quad x=(2k+1)\pi-\frac{\pi}{6}\right\}$$

نتیجهI: زاویه های که دارای $\sin$ های مساوی اند.

حالت اول: آن عده زوایایی که سیکنت $(\cos ec)$ ها و کوساین های آن مساوی اند، حل آن قرار ذیل است.

$$x=2k\pi+(-1)^k\alpha$$

اگر k طاق باشد عناصر s_2 و اگر k جفت باشد عناصر s_1، مثال فوق را ارایه می نمایند.

مثال: ست حل های معادله مثلثاتی $2\sin x-3=0$ را دریافت نمائید.

حل: معادله مثلثاتی از نوع حالت اول است.

$$2\sin x-3=0$$

$$\sin x=\frac{3}{2}$$

چون $\frac{3}{2}>1$ است بنا برآن معادله حل نه دارد.

حالت دوم: $\cos x = b \; (a\cos x + b = 0)$

در حالیکه $-1 \le b \le 1$ است

$$\cos\beta = b$$
$$\sin x = \cos\beta$$

و تمام قیمت های x از رابطه $x = 2k\pi + \beta$ و $x = 2k\pi - \beta$ بدست می آید.

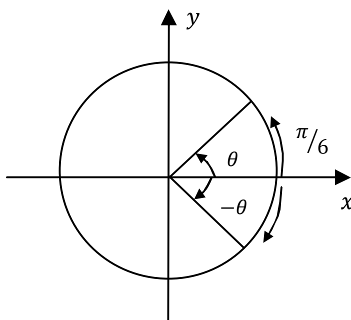
اگر $b > 1$ و یا $b < -1$ باشد معادله حل نه دارد.

مثال: ست حل معادله مثلثاتی $2\cos x - \sqrt{3} = 0$ را دریافت نمائید.

حل: معادله مثلثاتی را به شکل عمومی حالت دوم تبدیل می نمائیم.

$$2\cos x - \sqrt{3} = 0$$
$$\cos x \sqrt{3/2}$$
$$\cos x = \cos\frac{\pi}{6} = \cos 30^o$$

در مثال فوق بی نهایت زوایای وجود دارند که $\cos$ آن $\sqrt{3}/2$ است، کوچکترین زاویه آن $\frac{\pi}{6}$ است.



اکنون در دایره مثلثاتی تمام زوایای که $\cos\frac{\pi}{6} = \sqrt{3}/2$ است دریافت می نمائیم.

$$x = \frac{\pi}{6} \;,\; 2\pi + \frac{\pi}{6} \;,\; 4\pi + \frac{\pi}{6} \;,\; \ldots$$
$$x = -\frac{\pi}{6} \;,\; 2\pi - \frac{\pi}{6} \;,\; 4\pi - \frac{\pi}{6} \;,\; \ldots$$

به شکل عموم ست های فوق را میتوان طوری ذیل نوشت.

$$x = 2k\pi \pm \theta$$

$$s=\left\{x \middle| x=2k\pi+\frac{\pi}{6} \quad , \quad x=2k\pi-\frac{\pi}{6} \quad , \quad k\in\mathbb{Z}\right\}$$

و حل های که در فاصله $[0\ ,\ 2\pi]$ واقع اند عبارت اند از:

$$k=0\ ,\ x=\frac{\pi}{6}\ ,\ k=1\ ,\ x=2\pi-\frac{\pi}{6}=\frac{12\pi-\pi}{6}=\frac{11\pi}{6}$$

مثال: حل معادله $2\cos x+\sqrt{2}=0$ را در انتروال $(0\ ,\ 2\pi)$ در یافت نمائید.

حل:

$$2\cos x=-\sqrt{2}$$

$$\cos x=-\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\cos x=\cos\frac{3\pi}{4}=-\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$x=\frac{3\pi}{4}$$

و ست حل آن $S=\left\{x \middle| x=2k\pi+\frac{3\pi}{4} \quad , \quad x=2k\pi-\frac{3\pi}{4} \ , \ k\in\mathbb{Z}\right\}$

دیده می شود که معادله در انترول $(0\ ,\ 2\pi)$ دارای دو حل است.

$$k=0, \qquad x_1=\frac{3\pi}{4} \qquad k=1, \qquad x_2=\frac{5\pi}{4}$$

نتیجه 2: زوایای که دارای $\cos$ های مساوی اند.

حالت دوم: آن عده زوایای که $\cos$ و $\sec$ های مساوی دارند فورمول عمومی شان قرارذیل است.

$$x=2k\pi\pm\alpha$$

حالت سوم: $tg\ x=c$ $(tg\ x+b=0)$ زاویه γ را طوری دریافت می نمائیم که $tg\gamma=c$، پس $tgx=tg\gamma$ و حل عمومی آن $x=k\pi+\gamma$.

مثال: ست حل معادله $tgx-\sqrt{3}=0$.

حل:

$$tgx-\sqrt{3}=0$$

$$\tan x=\sqrt{3}$$

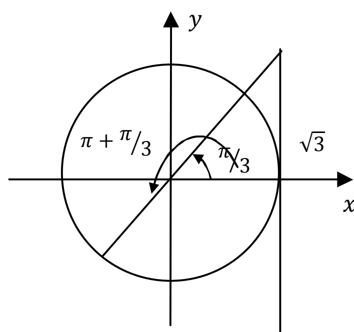
$$\tan x=tg\frac{\pi}{3}=tg60^o$$

$$x=\frac{\pi}{3}$$

در دایره مثلثاتی تمام زوایای دریافت می نمائیم که tg آن عدد $\sqrt{3}$ است.

$$x=\left\{\frac{\pi}{3}\ ,\ 2\pi+\frac{\pi}{3}\ ,\ 4\pi+\frac{\pi}{3}\ ,\ \ldots\right\}$$

$$x=\left\{\pi+\frac{\pi}{3}\ ,\ 3\pi+\frac{\pi}{3}\ ,\ 5\pi+\frac{\pi}{3}\ ,\ \ldots\right\}$$



به شکل عمومی ست حل های آن عبارت اند از $S=\left\{x\middle|x=k\pi+\frac{\pi}{3}\ ,\ k\in\mathbb{Z}\right\}$

مثال: حل های معادله $tg\left(2\frac{x}{\pi}-\frac{\pi}{4}\right)=tg\left(2\frac{x}{\pi}+\frac{\pi}{3}\right)$ رادر انتروال $\left[0\ ,\ 2\pi\right[$ دریافت نمائید.

حل:

$$tg\left(2x-\frac{\pi}{4}\right)=tg\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)$$

$$2x-\frac{\pi}{4}=k\pi+\left(x+\frac{\pi}{3}\right)\Rightarrow 2x-x=k\pi+\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{4}$$

$$x=k\pi+\frac{4\pi+3\pi}{12}\Rightarrow x=k\pi+\frac{7\pi}{12}$$

$$k=0\quad x_1=\frac{7\pi}{12}\qquad k=1\qquad x_2=\pi+\frac{7\pi}{12}=\frac{12\pi+7\pi}{12}=\frac{19\pi}{12}$$

حالت چهارم: $\cot g\ x=d$ $\left(\cot g\ x+b=0\right)$

زاویه θ را طوری دریافت می نمائیم که $\cot g\theta=d$ باشد، پس $\cot g\ x=\cot g\theta$ و فورمول عمومی برای تعین x داریم. $\quad x=k\pi+\theta$

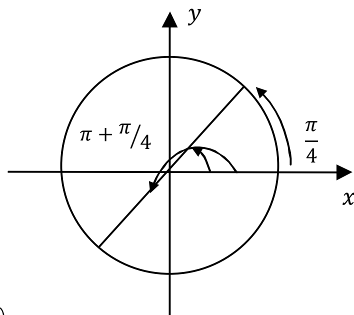
رابطه فوق حل عمومی است. اگر در معادله در انتروال معین حل ها مطلوب باشد، در این صورت برای k قیمت های تام داده تا جواب های مورد نظر حاصل گردد.

مثال: معادله $\cot g\ x - 1 = 0$ را حل نمائید.

$$\cot g\ x - 1 = 0 \Rightarrow \cot gx = 1$$

در بین انتروال $[0\ ,\ 2\pi]$ زاویه را دریافت می نمائیم که کوتانجانت آن مساوی به عدد یک باشد.

$$\cot g\ x = \cot g \frac{\pi}{4} \Rightarrow x = \frac{\pi}{4}$$



ست حل های آن قرار ذیل است.

$$S_1 = \left\{\frac{\pi}{4}, 2\pi+\frac{\pi}{4}\ ,\ 4\pi+\frac{\pi}{4},\ \dots\right\}$$

$$S_2 = \left\{\pi + \frac{\pi}{4}\ ,\ 3\pi+\frac{\pi}{4}, \dots\right\}$$

$$S\left\{x | x = k\pi + \theta \quad k \in \mathbb{Z}\right\}$$

مثال: معادله $\cot g\ 3x = \cot g\ x$ را حل نمائید.

حل:

$$\cot g\ 3x = \cot g\ x \Rightarrow 3x = k\pi + x$$

$$3x - x = k\pi \Rightarrow 2x = k\pi \Rightarrow x = \frac{k\pi}{2}\ ,\ k \in \mathbb{Z}$$

نتیجه3: زوایای که دارای tg و $\cot g$ مساوی اند: زوایای که دارای tg و $\cot g$ های مساوی اند بصورت عموم فورمول ذیل را دارا اند.

$$x = k\pi + \theta$$

حل معادلات درجه دوم مثلثاتی: شکل عمومی آن قرار ذیل است.

$$a\sin^2 x + b\cos^2 x + c\sin x\cos x = 0$$

درحالیکه a , b و c اعداد ثابت اند:

معادلات درجه دوم مثلثاتی با استفاده از طریقه های معادلات درجه دوم الجبری قابلیت حل را داشته و زوایای مجهول مربوطه دریافت گردیده می توانند.

مثال: معادله مثلثاتی $6\sin^2 x - 5\sin x + 1 = 0$ را حل نمائید.

حل: در معادله فوق تعویض $y = \sin x$ را تطبیق می نمائیم.

$$6y^2-5y+1=0$$
$$\Delta=b^2-4ac=(-5)^2-4(6)(1)=25-24=1$$
$$y_{1,2}=\frac{5\pm1}{12}\ \Rightarrow\quad y_1=\frac{5+1}{12}=\frac{6}{12}=\frac{1}{2}\quad y_2=\frac{5-1}{12}=\frac{4}{12}=\frac{1}{3}$$
$$\sin x=y_1=\frac{1}{2}$$
$$\sin x=y_2=\frac{1}{3}$$

خوردترین زاویه که $\sin$ آن $\frac{1}{2}$ است، عبارت از $\frac{\pi}{6}$ میباشد. بنابر آن

$$S=\left\{\begin{matrix} x=2k\pi+\frac{\pi}{6} \\ x=(2k+1)\pi-\frac{\pi}{6}\end{matrix}\quad k\in\mathbb{Z}\right\}$$

یا

$$x=k\pi+(-1)^k\alpha\ \Rightarrow\ x=k\pi+(-1)^k\frac{\pi}{6}\quad,\quad k=0\,,1\,,2\,,\ldots$$

همچنان برای $\sin x=\frac{1}{3}$ خوردترین زاویه که $\sin$ آن $0,33$ است، از جدول مثلثاتی عبارت از $19^{o}.30'$ یا $\frac{13\pi}{120}$ است.

$$A=\left\{\begin{matrix} x=2k\pi+\frac{13\pi}{120} \\ x=(12k+1)\pi-\frac{13\pi}{120}\end{matrix}\quad k\in\mathbb{Z}\right\}$$

یا

$$x=k\pi+(-1)^k\frac{13\pi}{120}\qquad k=0\,,1\,,2\ldots$$

مثال: معادله $2\cos^2 x+\cos x-3=0$ را حل نمائید.

حل: اگر $y=\cos x$ وضع نمائیم داریم که

$$2\cos^2 x+\cos x-3=0$$
$$2y^2+y-3=0$$
$$\Delta=b^2-4ac=1-4(2)(-3)=1+24=25$$

$$y_{1,2} = \frac{-1 \pm 5}{4} \Rightarrow y_1 = \frac{-1+5}{4} = 1$$
$$y_1 = \cos x = 1$$
$$y_2 = \frac{-1-5}{4} = \frac{-6}{4} = \frac{-3}{2}$$
$$y_2 = \cos x = -\frac{3}{2}$$
$$y_1 = \cos x = 1$$
$$x = 0 \quad , \quad x = 2k\pi$$

یا

$$x = 2k\pi + (-1)^k \alpha$$

$y_2 = \cos x = -\frac{3}{2}$ حل نه دارد (چرا)

مثال: معادله مثلثاتی $(m-2)tg^2x + (2m-1)tgx - 2 = 0$ داده شده است.

a. به کدام قیمت های m معادله دارای حل است.

b. به قیمت $m = -3$ حل ها را دریافت نمائید.

حلa: میدانیم که tgx به هرقیمت حقیقی معین شده میتواند. بنابرین شرط اگر $\Delta \geq 0$ باشد معادله دارای حل حقیقی است.

$$\Delta = b^2 - 4ac = (2m-1)^2 - 4(m-2)(-2)$$
$$\Delta = 4m^2 - 4m + 1 + 8(m-2)$$
$$\Delta = 4m^2 - 4m + 1 + 8m - 16 = 4m^2 + 4m - 15 \geq 0$$

به قیمت های $m \geq 3/2$ و $m \leq 5/2$ معادله فوق دارای حل حقیقی است.

حل b.به قیمت $m = -3$ معادله شکل ذیل را حاصل می نمائیم.

$$-5tg^2x - 7tgx - 2 = 0 \Rightarrow 5tg^2x + 7tgx + 2 = 0$$

اگر $y = tgx$ وضع نمائیم داریم که:

$$5y^2 + 7y + 2 = 0$$
$$y_{1,2}\ tgx = \frac{-7 \pm \sqrt{49-40}}{10} = \frac{-7 \pm 3}{10} \Rightarrow tgx = -1 \ , \ tgx = -\frac{2}{5}$$
$$tgx = -1 = -tg\frac{\pi}{4} = tg(-\frac{\pi}{4}) \Rightarrow x = k\pi - \frac{\pi}{4}$$
$$tg(x) = \frac{-2}{5} = -tgx = tg(-\alpha) \quad , \quad \alpha = 21^o\ 48'\ 5''$$

لکچر دوم

حل سیستم های معادلات مثلثاتی دو مجهوله

برای حل سیستم های معادلات مثلثاتی چند مجهوله طریقه و قاعده معین وجود نه دارد که در حل سیستم های معادلات مثلثاتی از آن استفاده گرد. انجه درین مورد میتوان برای حل بعضی از سیستم های معادلات چند مجهوله مثلثاتی مورد استفاده قرار داد باید نکات ذیل را مراعات نمود.

1. در صورت امکان هر سیستم را به سیستم های ساده تبدیل می نمائیم.
2. اگر معادله های سیستم چند مجهوله ئی مثلثاتی فقط شامل نسبت های مثلثاتی زاوایای مجهول باشند باید تمام نسبت های مثلثاتی هر زاویه مجهول را به یکی از نسبت های آن زاویه تبدیل کرد تا سیستم مثلثاتی به یک سیستم چند مجهوله تبدیل شود.
3. اگر معادله های سیستم علاوه بر نسبت های مثلثاتی شامل زوایای باشند درین صورت باید با انجام دادن عملیه های لازم و با استفاده از رابطه های مثلثاتی در معادله شامل نسبت های مثلثاتی زاوایا رابطه (یا رابطه های) دیگر بین زاوایای بدست آورده و سیستم را به حل یک سیستم چند مجهولی نسبت به زوایا تبدیل و حل کرد.
4. برای حل سیستم های دو مجهوله مثلثاتی که یکی از معادله های آن به صورت مجموع و یا تفاضل دو زاویه مجهول بوده و معادله دیگری شامل نسبت های مثلثاتی آن دو زاویه باشد طریقه حل های خاص وجود دارد که در ذیل آنرا تشریح می نمایم.

- **سیستم های مثلثاتی کلاسیک نوع اول:** سیستم های دو معادله دو مجهوله ئی که به شکل عمومی قرار ذیل است بنام سیستم های مثلثاتی کلاسیک نوع اول موسوم اند.

$$\begin{cases} x \pm y = \alpha \\ \sin x \pm \sin y = a \end{cases} \qquad \begin{cases} x \pm y = \alpha \\ \cos x \pm \cos y = a \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \pm y = \alpha \\ \cot gx \pm \cot gy = a \end{cases} \qquad \begin{cases} x \pm y = \alpha \\ tgx \pm tgy = a \end{cases}$$

در حالیکه a عدد معلوم و α قوس یا زوایه معلوم و همچنان x و y قوس یا زوایه های مجهول اند.

در سیستم های مثلثاتی فوق دیده می شود که مجموع یا تفاضل دو زاویه و نیز مجموع یا تفاضل نسبت های مثلثاتی هم نوع از زوایای مجهول معلوم است برای حل این سیستم های معادله دوم را به حاصل ضرب تبدیل می نمایم. اکنون از سیستم های فوق یکی آنرا حل می نمایم.

$$\begin{cases} x + y = \alpha & I \\ \cos x + \cos y = a & II \end{cases}$$

در رابطه (II) فورمول حاصل ضرب را تطبیق می نمایم.

$$\cos x+\cos y=a\Rightarrow 2\cos\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}=a$$

$$\begin{cases} x+y=\alpha & I \\ 2\cos\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}=a & II \end{cases}$$

قیمت $x+y$ را در رابطه II وضع نموده و سیستم را به یک معادله تبدیل می نمایم.

$$2\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{x-y}{2}=a$$

یا

$$\cos\frac{x-y}{2}=\frac{a}{2\cos{\alpha/2}}$$

با فرض اینکه $-1\le\frac{a}{2\cos{\alpha/2}}\le 1$ و $\frac{a}{2\cos{\alpha/2}}=\cos\frac{\varphi}{2}$ وضع نمایم درین صورت خواهیم داشت:

$$\cos\frac{x-y}{2}=\cos{\varphi/2}$$

$$\frac{x-y}{2}=2k\pi\pm\frac{\varphi}{2}$$

$$\begin{cases} x-y=4k\pi\pm\varphi \\ x+y=\alpha \end{cases}$$

تعین زوایای مجهول منجر به حل یک سیستم در معادله دو مجهولی گردید که از انجا زوایای مجهول به ساده گی تعین خواهد شد، از حل سیستم فوق میتوان نوشت:

$$\begin{cases} x=2k\pi+{\varphi/2}+{\alpha/2} \\ y=-2k\pi-{\varphi/2}+{\alpha/2} \end{cases} \quad k\in\mathbb{Z}$$

$$\begin{cases} x=2k\pi-{\varphi/2}+{\alpha/2} \\ y=-2k\pi+{\varphi/2}+{\alpha/2} \end{cases} \quad k\in\mathbb{Z}$$

مثال: سیستم مثلثاتی دو مجهوله ذیل را حل نمائید.

$$\begin{cases} x-y={\pi/3} \\ \sin x-\sin y={1/2} \end{cases}$$

حل: رابطه دومی را به شکل حاصل ضرب می نویسیم.

$$2\cos\frac{x+y}{2}\sin\frac{x-y}{2}=\frac{1}{2}$$

$$2\cos\frac{x+y}{2}\sin\frac{\pi}{6}=\frac{1}{2}$$

$$\cos\frac{x+y}{2}=\frac{1}{2}=\cos\frac{\pi}{3}$$

$$\frac{x+y}{2}=2k\pi\pm\frac{\pi}{3}$$

$$\begin{cases} x+y=4k\pi\pm\dfrac{2\pi}{3} \\ x-y=\dfrac{\pi}{3} \end{cases}$$

از حل سیستم فوق داریم:

$$\left| \begin{array}{l} x=2k\pi+\frac{\pi}{2} \\ y=2k\pi+\frac{\pi}{6} \end{array} \right. \quad k\in\mathbb{Z}$$

$$\left| \begin{array}{l} x=2k\pi-\frac{\pi}{6} \\ y=2k\pi-\frac{\pi}{2} \end{array} \right. \quad k\in\mathbb{Z}$$

مثال سوم: سیستم دو معادله دو مجهوله ذیل را حل نمائید.

$$\begin{cases} x+y=\dfrac{\pi}{4} \\ tgx+tgy=2(\sqrt{2}-1) \end{cases}$$

حل: معادله دوم سیستم را به شکل ذیل نیز ارایه کرده می توانیم

$$\frac{\sin(x+y)}{\cos x\cos y}=2(\sqrt{2}-1)$$

$$\begin{cases} \dfrac{\sin(x+y)}{\frac{1}{2}\left[\cos(x+y)+\cos(x-y)\right]}=2(\sqrt{2}-1) \\ x+y\ =\ \dfrac{\pi}{4} \end{cases}$$

به جای $x+y$ مقدارش یعنی $\frac{\pi}{4}$ وضع می نمایم.

$$\frac{2\sin\frac{\pi}{4}}{\cos\frac{\pi}{4}+\cos(x-y)}=2(\sqrt{2}-1)$$

$$\frac{\sqrt{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}+\cos(x-y)}=2(\sqrt{2}-1)$$

از رابطه فوق نتیجه می شود که $\cos(x-y)=1$ شود. در نتیجه داریم

$$\begin{cases} x-y=2k\pi \\ x+y=\frac{\pi}{4} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=k\pi+\frac{\pi}{8} \\ y=-k\pi+\frac{\pi}{8} \end{cases}$$

- **سیستم های مثلثاتی کلاسیک نوع دوم:** سیستم های دو معادله و دو مجهوله که به یکی از اشکال ذیل باشند بنام سیستم های مثلثاتی کلاسیک نوع دوم یاد میگردد.

$$\begin{cases} x\pm y=\alpha \\ \sin x\cos y=a \end{cases} \qquad \begin{cases} x\pm y=\alpha \\ \cos x\cos y=a \end{cases}$$

$$\begin{cases} x\pm y=\alpha \\ \sin x\sin y=a \end{cases} \qquad \begin{cases} x\pm y=\alpha \\ tgx\ \ tgy=a \end{cases}$$

$$\begin{cases} x\pm y=\alpha \\ \cot g\, x\cot g\ \ y=a \end{cases}$$

درحالیکه a عدد ثابت و α قوس یازاویه معلوم و xو y قوس و یا زاویه مجهول اند.

برای حل این سیستم ها معادله دوم را با حاصل جمع تبدیل می نمائیم و از انجا با معلوم بودن $x\pm y$ مقدار $x\mp y$ راتعین کرده سپس xو y را بدست می آوریم. اکنون از سیستم فوق را حل می نمائیم.

$$\begin{cases} x+y=\alpha \\ \sin x\sin y=a \end{cases}$$

در معادله دومی سیستم فورمول حاصل جمع را تطبیق می نمائیم.

$$\sin x\cdot\sin y=\frac{1}{2}\left[\cos(x-y)-\cos(x+y)\right]=a$$

چون $(x+y)=\alpha$ است، بنا بر این

$$\sin x \cdot \sin y = \frac{1}{2}\left[\cos(x-y) - \cos\alpha\right] = a$$

$$\frac{1}{2}\left[\cos(x-y) - \cos\alpha\right] = a$$

$$\cos(x-y) - \cos\alpha = 2a$$

$$\cos(x-y) = 2a + \cos\alpha$$

با فرض اینکه $-1 \le 2a + \cos\alpha \le 1$ ، $-\cos^2\frac{\alpha}{2} \le a \le \sin^2\frac{\alpha}{2}$ و اگر $2a + \cos\alpha = \cos\varphi$ وضع نمائیم دراین صورت خواهیم داشت

$$\cos(x-y) = \cos\alpha$$

و

$$\begin{cases} x - y = 2k\pi \pm \varphi \\ x + y = \varphi \end{cases}$$

از حل سیستم فوق میتوان نوشت

$$2x = 2k\pi \pm \varphi + \propto$$

$$\left| \begin{array}{l} x = k\pi + \varphi/2 + \propto/2 \\ y = -k\pi - \varphi/2 + \propto/2 \end{array} \right.$$

$$\left| \begin{array}{l} x = k\pi - \varphi/2 + \propto/2 \\ y = -k\pi + \varphi/2 + \propto/2 \end{array} \right. \qquad k \in \mathbb{Z}$$

و

مثال: سیستم ذیل را حل نمائید.

$$\begin{cases} x + y = \frac{5\pi}{6} \\ \cos x \cos y = -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$$

حل:

$$2\cos x \cos y = -\sqrt{3}$$

$$\cos(x+y) + \cos(x-y) = -\sqrt{3}$$

$$\cos\frac{5\pi}{6} + \cos(x-y) = -\sqrt{3}$$

مثال: سیستم معادلات مثلثاتی ذیل را حل نمائید.

$$\begin{cases} x-y=\frac{\pi}{3} \\ tg\,x\ tg\,y=-3 \end{cases}$$

حل: میدانیم که

$$\frac{\sin x\sin y}{\cos x\cos y}=-3$$

$$\frac{\cos(x-y)-\cos(x+y)}{\cos(x+y)+\cos(x-y)}=-3$$

$$\frac{\cos\frac{\pi}{3}-\cos(x+y)}{\cos(x+y)+\cos(x-y)}=-3$$

$$\frac{\frac{1}{2}-\cos(x+y)}{\cos(x+y)+\frac{1}{2}}=-3\Rightarrow\cos(x+y)=-1$$

$$\begin{cases} x+y=2k\pi+\pi \\ x-y=\frac{\pi}{3} \end{cases}\Rightarrow\quad \begin{matrix} x=k\pi+\frac{2\pi}{3} \\ y=k\pi+\frac{\pi}{3} \end{matrix}$$

برای حل این نوع از سیستم های معادلات مثلثاتی در دو طرف معادله دوم سیستم از قوانین نسبت و تناسب استفاده می نمائیم طوریکه به وسیله جمع در صورت و تفریق از مخرج آن به صورت کسری که در صورت و مخرجش مجموع و تفاضل دو نسبت مثلثاتی هم نوع است تبدیل می نمائیم وپس از تبدیل صورت و مخرج به حاصل ضرب با در نظرگرفتن $x\pm y=\alpha$ مقدار $x\mp y$ را تعین نموده و بعد از آن x و y به اسانی بدست می اید و اکنون یکی آن را حل می نمائیم.

$$\begin{cases} x+y=\alpha \\ \frac{\sin x}{\sin y}=a \end{cases}$$

$$\frac{Sinx+Siny}{Sinx-Siny}=\frac{a+1}{a-1}$$

$$\frac{2Sin\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}}{2\cos\frac{x+y}{2}\cdot\sin\frac{x-y}{2}}=\frac{a+1}{a-1}$$

$$tg\frac{x+y}{2}\ \cot g\ \frac{x-y}{2}=\frac{a+1}{a-1}$$

$$tg\frac{\alpha}{2}\cot g\frac{x-y}{2}=\frac{a+1}{a-1}$$

$$\cos ty\frac{x-y}{2}=\frac{a+1}{a-1}\cot g\frac{\alpha}{2}=\cot g\frac{\varphi}{2}$$

$$\frac{x-y}{2}=k\pi+\frac{\varphi}{2}\ \Rightarrow\ x-y=2k\pi+\varphi$$

$$\begin{cases} x-y=2k\pi+\varphi \\ x+y=\alpha \end{cases}$$

از حل سیستم فوق داریم

$$\begin{aligned} x&=k\pi+\frac{\varphi}{2}+\frac{\alpha}{2} \\ y&=-k\pi-\frac{\varphi}{2}+\frac{\alpha}{2} \end{aligned}\qquad k\in\mathbb{Z}$$

مثال: سیستم ذیل را حل نمائید:

$$\begin{cases} x-y=\dfrac{\pi}{3} \\ \dfrac{\cos x}{\cos y}=2-\sqrt{3} \end{cases}$$

حل: به ترتیب چنین می نوسیم:

$$\frac{\cos x+\cos y}{\cos x-\cos y}=\frac{2-\sqrt{3}+1}{2-\sqrt{3}-1}=\frac{\sqrt{3}(\sqrt{3}-1)}{-(\sqrt{3}-1)}=-\sqrt{3}$$

$$\frac{2\cos\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}}{-2\sin\frac{x+y}{2}\sin\frac{x-y}{2}}-\sqrt{3}$$

$$\cos(x-y)=-\sqrt{3}-\cos\frac{5\pi}{6}=-\sqrt{3}+\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{-2\sqrt{3}+\sqrt{3}}{2}=-\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\cos(x-y)=-\frac{\sqrt{3}}{2}=-\frac{\sqrt{3}}{2}=\cos\frac{5\pi}{6}$$

$$\begin{cases} x-y=2k\pi\pm\dfrac{5\pi}{6} \\ x+y=\dfrac{5\pi}{6} \end{cases}$$

$$\begin{vmatrix} x=k\pi \\ y=-k\pi+\dfrac{5\pi}{6} \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} x=k\pi+\dfrac{5\pi}{6} \\ y=-k\pi \end{vmatrix}$$

مثال: سیستم معادلات مثلثاتی ذیل را حل نمائید.

$$\begin{cases} x-y=\dfrac{\pi}{3} \\ tg\,x\,tgy=-3 \end{cases}$$

حل: میدانیم که

$$\frac{\sin x\sin y}{\cos x\cos y}=-3$$

$$\frac{\cos(x-y)-\cos(x+y)}{\cos(x+y)\cos(x-y)}=-3$$

$$\frac{\cos\frac{\pi}{3}-\cos(x+y)}{\cos(x+y)+\cos\frac{\pi}{3}}$$

$$\frac{\frac{1}{2}-\cos(x+y)}{\cos(x+y)+\frac{1}{2}}=-3\Rightarrow\cos(x+y)=-1$$

$$\begin{cases} x+y=2k\pi+\pi \\ x-y=\dfrac{\pi}{3} \end{cases}\Rightarrow \begin{matrix} x=k\pi+\dfrac{2\pi}{3} \\ y=k\pi+\dfrac{\pi}{3} \end{matrix}$$

- سیستم های مثلثاتی کلاسیک نوع سوم: سیستم های دو معادله دو مجهوله که به شکل عمومی قرار ذیل است بنام سیستم های مثلثاتی کلاسیک نوع سوم موسوم اند.

$$\frac{\sin x \sin y}{\cos x \cos y} = -3$$

$$\frac{\cos(x-y)-\cos(x+y)}{\cos(x+y)\cos(x-y)} = -3$$

$$\frac{\cos\frac{\pi}{3}-\cos(x+y)}{\cos(x+y)+\cos\frac{\pi}{3}}$$

$$\frac{\frac{1}{2}-\cos(x+y)}{\cos(x+y)+\frac{1}{2}} = -3 \Rightarrow \cos(x+y) = -1$$

$$\begin{cases} x \pm y = \alpha \\ \dfrac{\sin x}{\sin y} = a \end{cases} \quad \begin{cases} x \pm y = \alpha \\ \dfrac{\cos x}{\cos y} = a \end{cases} \quad \begin{cases} x \pm y = \alpha \\ \dfrac{tgx}{tgy} = a \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \pm y = \alpha \\ \dfrac{\cot x}{\cot y} = a \end{cases}$$

برای حل این نوع سیستم های معادلات مثلثاتی در دو طرف معادله دوم سیستم از قوانین نسبت و تناسب استفاده می نمائیم طوریکه به وسیله جمع در صورت و تفریق از مخرج آن به صورت کسری که در صورت و مخرجش مجموع و تفاضل دو نسبت مثلثاتی هم نوع است تبدیل می نمائیم وپس از تبدیل صورت و مخرج به حاصل ضرب با در نظرگرفتن $x \pm y = \alpha$ مقدار $x \mp y$ را تعین نموده و بعد از آن x و y به اسانی بدست می اید و اکنون یکی آن را حل می نمائیم.

$$\begin{cases} x + y = \alpha \\ \dfrac{\sin x}{\sin y} = a \end{cases}$$

$$\frac{Sinx + Siny}{Sinx - Siny} = \frac{a+1}{a-1}$$

$$\frac{2Sin\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}}{2\cos\frac{x+y}{2}\cdot\sin\frac{x-y}{2}} = \frac{a+1}{a-1}$$

$$tg\frac{x+y}{2}\ \cot g\ \frac{x-y}{2}=\frac{a+1}{a-1}$$

$$tg\frac{\alpha}{2}\cot g\frac{x-y}{2}=\frac{a+1}{a-1}$$

$$\cot y\frac{x-y}{2}=\frac{a+1}{a-1}\cot g\frac{\alpha}{2}=\cot g\frac{\varphi}{2}$$

$$\frac{x-y}{2}=k\pi+\frac{\varphi}{2}\ \Rightarrow\ x-y=2k\pi+\varphi$$

$$\begin{cases}x-y=2k\pi+\varphi\\x+y=\alpha\end{cases}$$

از حل سیستم فوق داریم

$$\begin{aligned}x&=k\pi+\frac{\varphi}{2}+\frac{\alpha}{2}\\y&=-k\pi-\frac{\varphi}{2}+\frac{\alpha}{2}\end{aligned}\qquad k\in\mathbb{Z}$$

مثال: سیستم ذیل را حل نمائید:

$$\begin{cases}x-y=\frac{\pi}{3}\\\frac{\cos x}{\cos y}=2-\sqrt{3}\end{cases}$$

حل: به ترتیب چنین می نوسیم:

$$\frac{\cos x+\cos y}{\cos x-\cos y}=\frac{2-\sqrt{3}+1}{2-\sqrt{3}-1}=\frac{\sqrt{3}(\sqrt{3}-1)}{-(\sqrt{3}-1)}=-\sqrt{3}$$

$$\frac{2\cos\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}}{-2\sin\frac{x+y}{2}\sin\frac{x-y}{2}}-\sqrt{3}$$

$$\cot g\ \frac{x+y}{2}\cot g\frac{x-y}{2}=\sqrt{3}$$

$$\cot g\frac{x+y}{2}=\cot g\frac{\pi}{6}=\sqrt{3}$$

$$\cot g\frac{x+y}{2}=1$$

$$\cot g\frac{x+y}{2}=\cot g\frac{\pi}{4}$$

$$\begin{cases} x+y=2k\pi+\dfrac{\pi}{2} \\ x-y=\dfrac{\pi}{3} \end{cases}$$

$$\left| \begin{array}{l} x=k\pi+\dfrac{5\pi}{12} \\ y=k\pi+\dfrac{\pi}{12} \end{array} \right. \quad k\in\mathbb{Z}$$

لکچر سوم

حل معادلات لوگارتم و اکسپوننشیل

تابع اکسپوننشیل: اگر a یک عدد مثبت و $a \neq 1$ باشد، درین صورت تابع

$$f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$$
$$f(x) = a^x$$
$$a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\} \text{ و } x \in \mathbb{R}$$

را بنام تابع اکسپوننشیل به قاعده a گویند.

مثال های آن $f(x) = 2^x$ و $f(x) = 2^{-x}$ عبارت از توابع اکسپوننشیل به قاعده 2 اند.

اگر در تابع اکسپوننشیل $a > 1$ باشد، تابع اکسپوننشیل متزاید است. و اگر $a < 1$ باشد، تابع اکسپوننشیل متناقص است.

و اگر $a = 1$ باشد تابع بنام تابع ثابت یاد می گردد.

مثال: گراف تابع $y = 2^x$ را رسم نمائید.

حل: جدول را به چند قیمت معین ترتیب میدهیم:

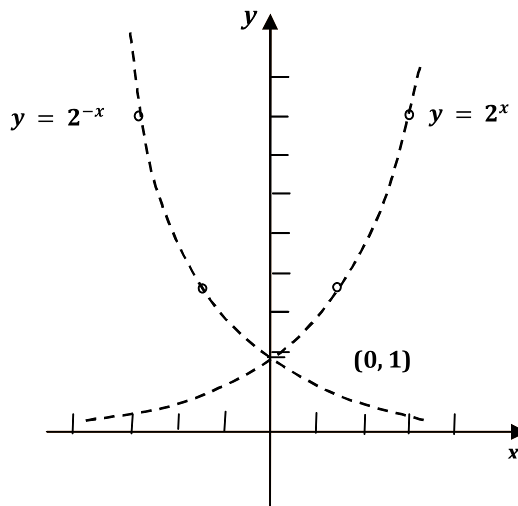
x		-2	-1	0	1	2	3
y	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4	8

چون $a = 2$ است بنابران تابع متزاید است.

مثال: گراف تابع $f(x) = 2^{-x}$ را رسم نمائید.

حل:

x	–3	-2	-1	0	1	2	3
y	8	4	2	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$



خاصیت های تابع اکسپوننشیل:

خاصیت های اساسی تابع اکسپوننشیل قرار ذیل است

1. ناحیه تعریف هر تابع اکسپوننشیل تمام اعداد حقیقی است و ناحیه قیمت های آن اعداد مثبت است
2. هر تابع اکسپوننشیل تابع یک به یک(injective) است یعنی

$$x_1 = x_2 \Leftarrow f(x_1) = f(x_2)$$

$$x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$$

3. هر تابع اکسپوننشیل به قیمت $a > 1$ متزاید و به قیمت $a < 1$ متناقص است.
4. گراف تابع اکسپوننشیل $f(x) = a^x$ از نقطه $(0\,,1)$ می گذرد.
5. گراف تابع های $f(x) = a^x$ و $g(x) = a^{-x}$ نظر به محور y متناظر واقع اند.
6. هر تابع اکسپوننشیل $y = a^x$ دارای تابع معکوس $x = \log_a^y$ است و معکوس تابع اکسپوننشیل $f(x) = a^x$ نظر به محور y عبارت از تابع $g(x) = a^{-x}$ میباشد.

حل معادلات اکسپوننشیل: معادلات که دارای توانهای مجهول باشند، بنام معادلات اکسپوننشیل یاد میگردد. برای دریافت توان مجهول هردو طرف مساوات را به قاعده های مساوی تعین نموده بعداز آن به اساس خاصیت های طاقت (در مساوات که قاعده های آن مساوی باشد توان های آن نیز مساوی اند) استفاده می نمائیم.

مثال: معادله $4^{x+1} + 4^x = 320$ راحل نمائید.

حل:

$$4^{x+1} + 4^x = 320$$

$$4^x(4+1)=320$$

$$4^x5=320$$

$$4^x=64$$

$$4^x=4^3 => x=3$$

مثال: معادله $2\cdot 3^{x+1} - 5\cdot 9^{x-2} = 81$ را حل نمائید.

حل:

$$2\cdot 3\ 3^x - 5\cdot 3^{2x-4} = 81$$

$$6\cdot 3^x - 5\cdot 3^{2x-4} = 81$$

$$6\cdot 3^x - \frac{5\cdot 3^{2x}}{3^4} = 81$$

$$81\cdot 6\ 3^x - 5\cdot 3^{2x} = (81)^2$$

$$5\cdot 3^{2x} - 486\ 3^x + 6561 = 0$$

اگر $3^x = z$ وضع گردد میتوان نوشت.

$$5z^2-486\cdot z+6561=0$$

$$z_1=81 \quad , \quad z_2=\frac{81}{5}$$

$$3^x=81 \quad , \quad 3^x=\frac{81}{5}$$

$$3^x=3^4 \Rightarrow x=4$$

$$3^x=\frac{3^4}{5} \Rightarrow x\ln 3=4\ln 3-\ln 5$$

$$x=4-\frac{\ln 5}{\ln 3}$$

مثال: معادله $34\cdot 7^x-34\cdot 5^{2x}=0$ را حل نمائید.

حل:

$$34\cdot 7^x-34\cdot 5^{2x}=0$$

$$7^x-5^{2x}=0$$

$$7^x=5^{2x}$$

$$7^x=(25)^x \Rightarrow \left(\frac{7}{25}\right)^x=\left(\frac{7}{25}\right)^0$$

$$x=0$$

توابع لوگارتمی: معکوس تابع اکسپوننشیل به نام تابع لوگارتمی یاد می شود و هر تابع اکسپوننشیل دارای تابع معکوس $y=f(x)=a^x$ معکوس $x=g(y)=\log_a^y$ است.

تابع لوگارتمی که قاعده آن a بوده و به شکل ذیل نشان داده می شود.

$$f^{-1}:\mathbb{R}^+\to\mathbb{R}$$

$$f^{-1}(x)=\log_a^x \qquad a\in\mathbb{R}^+ \ , \ a\neq 1$$

یا اگر

$$f(x)=y=a^x$$

$$f^{-1}(y)=x=\log_a^y$$

مثال: گراف تابع $y=3^x$ و $y=\log_3^x$ را رسم نمائید.

حل: جدول بعضی از قیمت های $y=3^x$ را ترتیب میدهیم.

x	-2	-1	0	1	2
y	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{3}$	1	3	9

همچنان تابع $y = \log_3^x$ را در نظر میگریم.

$x=1$

$y=\log_3^x=0 \quad \Rightarrow (1\,,\,0)$

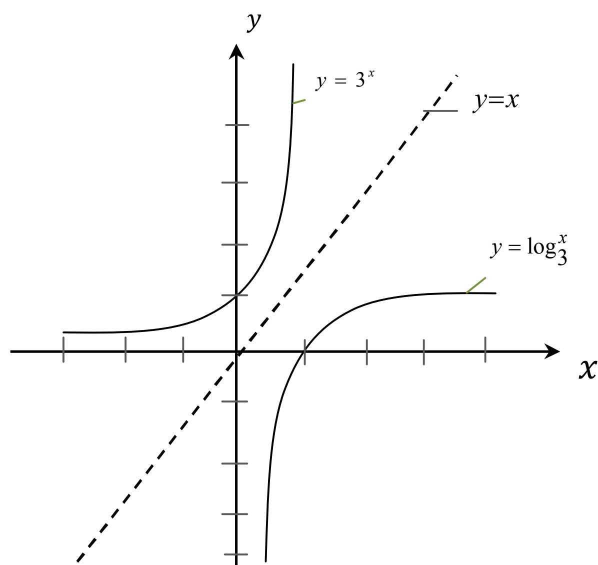
$x = \frac{1}{3}$

$y = \log_3^{1/3} = y = \log_3^{3^{-1}} = -1 \quad \Rightarrow \quad \left(\frac{1}{3}\;,\;-1\right)$

$x=3$

$y=\log_3^3=1 \;\Rightarrow\; (3\;,\;1)$

x	$\frac{1}{3}$	1	3
y	-1	0	1



مثال: اگر $f(x) = \log_3^x$ داده شده باشد $f(3)$, $f\left(\frac{1}{9}\right)$ و $f(1)$ را دریافت نمائید.

حل: در تابع داده شده به جای x قیمت ها را وضع می نمائیم.

$$f(x)=\log_3^x \quad => \quad f(3)=\log_3^3=1$$

$$f(x)=\log_3^9 \quad => \quad f(9)=\log_3^{3^2}=2$$

$$f(3^{-2})=\log_3^{3^{-2}}=-2$$

$$f(1)=\log_3^1=0$$

مثال: اگر $\log_3^x=4$ باشد قیمت x را دریافت نمائید.

حل: تابع فوق را به شکل توان می نوسیم.

$$\log_3^x=4 \quad => \quad x=3^4=81$$

خواص تابع لوگارتمی:

1. ساحه تعریف تابع لوگارتمی ست اعداد حقیقی مثبت است. $\mathbb{R}^+ \setminus \{0\}$
2. هر تابع لوگارتمی تابع یک به یک بوده یعنی برای هر $x_1 \neq x_2$ همیشه $f(x_1) \neq f(x_2)$ است.
3. گراف تابع لوگارتمی $y=\log_a^x$ در سیستم مختصات قایم از نقطه $(1\ ,\ 0)$ می گذرد.

معادلات لوگارتمی: افاده های لوگارتمی با هم مساوی که در آن مجهول موجود باشد به نام معادلات لوگارتمی یاد می گردد و برای دریافت قیمت مجهول از یک معادله لوگارتمی اولاً معادله داده شده را نظر به قوانین و قضای لوگارتم ساده ساخته، سپس در مطابقت به قوانین الجبری و یا معادلات توانی میتوان قیمت مجهول را محاسبه کرد.

مثال: معادله $\log(0\ ,\ 5+x)=\log 0\ ,\ 5-\log x$ را حل نمائید.

حل:

$$\log(0.5+x)=\log 0.5-\log x$$

$$\log(0.5+x)=\log\frac{0.5}{x}$$

$$0,5+x=\frac{0.5}{x}$$

$$2x_2+x-1=0$$

بعد از حل آن

$$x_1=0.5 \qquad , \qquad x_2=-1$$

حل آن $x_1=0.5$ بوده و $x_2=-1$ حل معادله نیست (چرا).

مثال: معادله $x^{\log x-1}=100$ را حل نمائید.

حل:

$$x^{\log x-1}=100$$
$$\log(x-1)\log x=\log 100$$
$$\log^2 x-\log x-\log 100=0$$
$$\log^2 x-\log x-2=0$$

اگر $\log x = y$ وضع نمائیم درین صورت میتوان نوشت:

$$y^2-y-2=0$$
$$y_{1,2}=\frac{1\pm\sqrt{1-4(1)(-2)}}{2\cdot 1}=\frac{1\pm\sqrt{1+8}}{2}=\frac{1\pm 3}{2}$$
$$y_1=2 \quad , \quad y_2=-1$$
$$y=\log x \ => \ 2=\log x \ => \ x=100$$
$$-1=\log x \ => \ x=10^{-1}=\frac{1}{10}=0.1$$

مثال: قیمت x را از معادله $\log_{\sqrt{5}}^{x}-\log_{\sqrt{5}}^{3}-\log_{\sqrt{5}}^{5}+\log_{\sqrt{5}}^{4}=0$ دریافت نمائید.

حل:

$$\log_{\sqrt{5}}^{x}-\log_{\sqrt{5}}^{3}-\log_{\sqrt{5}}^{5}+\log_{\sqrt{5}}^{4}=0$$
$$\log_{\sqrt{5}}^{x}=\log_{\sqrt{5}}^{3}+\log_{\sqrt{5}}^{5}-\log_{\sqrt{5}}^{4}=\log_{\sqrt{5}}(3\cdot 5)-\log_{\sqrt{5}}^{4}$$
$$\log_{\sqrt{5}}^{x}=\log_{\sqrt{5}}\frac{3\cdot 5}{4}=\log_{\sqrt{5}}\frac{15}{4}$$
$$x=\frac{15}{4}$$

مثال: معادله $2^{\frac{3}{\log_3^x}}=\frac{1}{64}$ را حل نمائید.

حل:

$$2^{\frac{3}{\log_3^x}}=\frac{1}{64}=2^{-6}$$
$$\frac{3}{\log_3^x}=-6 \quad , \quad \log_3^x=-\frac{1}{2}$$
$$x=3^{-\frac{1}{2}}$$

لکچر چهارم

استعمال لوگارتم و استفاده از لوگارتم در اجرای عملیه های ریاضی

استعمال لوگارتم: از مفاهیم لوگارتم در فزیک، کیمیا و محاسبات ریاضیکی باالخصوص در محاسبات و دریافت توان مجهول از آن استفاده میگردد.

استفاده از جدول لوگارتم: میدانیم که لوگارتم هر عدد حقیقی مثبت از دو قسمت صحیح و اعشاری تشکیل شده است، طوریکه قسمت های صحیح یا مشخصه عبارت از توانهای عدد 10 میباشد و قیمت اعشاری (مانتیس) را از روی جدول لوگارتم به قاعده 10 که قبلاً ترتیب گردیده، استفاده می شود، این جدول ها تاهفت بعضی تا پنج و بعضی هم تا چار و سه خانه اعشاریه ترتیب شده که نظر به تعداد ار قام تام اعشاری آن، جدول ها نام گذاری گردیده اند، مانند جدول چهار رقمی، پنج رقمی و هفت رقمی برای دریافت مانتیس یک عدد مورد نظر ارقام عدد داده شده را از طرف چپ در نظر گرفته به استثنای یک رقم طرف راست آن. اعداد طرف چپ را در سطر و یک عدد طرف راست را در ستون جدول ملاحظه نموده و بعداً تقاطع سطر و ستون در جدول عبارت از مانتیس آن عدد می باشد.

مثال: لوگارتم عدد 765 را محاسبه نمائید.

حل:

$$765 = 7.65 \cdot 10^2$$

$$\log 765 = \log(7.65 \cdot 10^2) = \log 7.65 + \log 10^2$$

$$\log 765 = \log 7 \cdot 65 + 2 = 2.8837$$

در رابطه فوق عدد 2 کرکترستیک بوده، برای دریافت مانتیس سطر 76 را تحت ستون 5 ملاحظه نموده که به عدد 0.8837 مطابقت مینماید. یعنی عدد 0.8837 مانتیس عدد 765 میباشد.

جدول(1)

N	1	2	3	4	5	6	7	8	9
76	0.8808	0.8814	0.8825	0.8831	0.8837	0.8842	0.8848	0.8854	0.8859

در نتیجه

$$\log 765 = \log 7 \cdot 65 + 2 = 2.8837$$

به شکل عمومی هر عدد مثبت x را میتوان به شکل $x = s \cdot 10^n$ ارایه کرد در حالیکه $1 \le S \le 10$ بوده و nیک عدد تام است. اگر لوگارتم x هدف باشد، درین صورت میتوان نوشت:

$$\log x = \log s + \log 10^n$$

$$\log x = \log s + n \log 10 = \log s + n$$

$\log s$ قسمت کسری $\log x$ است که بنام مانتیس و n کرکترستیک قسمت تام $\log x$ میباشد و همچنان $0 \le \log s \le 1$ است. ازینجا نتیجه می آید که مانتیس یک عدد صفر و یا بین صفر و یک کسر قرار دارد و همیشه یک کسر اعشاری مثبت است.

مثال: $\log 0.0429$ را محاسبه نمائید.

حل:

$$0.0429 = 4.29 \cdot 10^{-2}$$

$$\log 0.0429 = \log\left(4.29 \cdot 10^{-2}\right)$$

$$\log 0.0429 = \log 4.29 + \log 10^{-2}$$

$$= \log 4.29 - 2$$

برای دریافت لوگارتم عدد 4.29 طوری عمل می نمائیم که عدد 42 را در ستون اول طرف چپ و عدد 9 را در سطر اول فوقانی در نظر گرفته و عدد که در تقاطع سطر و ستون قرار دارد مانتیس عدد مطلوب است.

N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
42	0.6232	0.6242	0.6253	0.6263	0.6274	0.6284	0.6294	0.6304	0.6314	0.6325

$$\log 4.29 = 0.6325$$

$$\log 0.0429 = \log 4.29 = 0.6325 + (-2)$$

یاداشت: چون مانتیس همیشه مثبت است، پس اگر کرکترستیک منفی باشد و خواسته باشیم هردوی آنرا به شکل یک عدد مثبت بنوسیم علامه منفی را بالای کرکترستیک می نوسیم.

$$\log 0.0429 = \log 4.29 = 0.6325 - 2 = \bar{2}.325$$

برای تعین لوگارتم عدد نکات ذیل را مراعات می نمائیم.

1. لوگارتم هر عدد مثبت حقیقی متشکل از دو بخش است که یکی آن را کرکترستیک که عدد تام است و دوم ان عدد مانتیس که عدد کسری اعشاری می باشد.
2. اگر قسمت صحح عدد خلاف صفر باشد درین صورت کرکترستیک آن مساوی است به تعداد ارقام صحیح آن عدد منفی یک مثلاً $\log 526.9$ ، کرکترستیک آن 2 است زیرا تعداد ارقام صحیح 2،6 و 5 عبارت از عدد سه است و از آن یکی را کم نموده که تا عدد 2 حاصل گردید.
3. اگر عدد تنها قسمت اعشاری داشته باشد کرکترستیک لوگارتم آن 1 عدد منفی است، طوریکه تعداد صفرهای که طرف راست علامه اعشاری تا عدد صحیح قرار دارد جمع یک. مثلاً کرکترستیک $\log 0.0095$ عبارت از -3 است زیرا بعد از علامه اعشاری دو صفر است و به آن یکی را علاوه ساخته که تا -3 گردید.

مانتیس لوگارتم هرعدد از جدول لوگارتم دریافت مینمائیم.

انتی لوگارتم: اگر $x=\log_a y$ باشد، پس y را بنام انتی لوگارتم عدد x می نامند یعنی $y = anti\log x$ مثلاً اگر $\log 34 = 1.5315$ باشد انتی لوگارتم 1.5315 مساوی به عدد 34 است.

مثال: اگر $\log N = 4.4713$ باشد، N را دریافت نمائید.

حل: واضح است که درین مثال مانتیس 0.4713 است و 0.4713 آنرا در جدول یافته اعداد مربوط به سطر که عبارت از 6 و ستون که عبارت از 29 است یادداشت می نمائیم عدد مطلوب دارای ارقام 296 است. چون کرکترستیک 4 است، پس عدد مطلوب 5 رقمی است.

$$N = 29600$$

مثال: $\log N = -3.0531$ باشد، N را دریافت نمائید.

حل: در اینجا می بینیم که کرکترستیک و مانتیس هر دو منفی اند و در جدول مانتیس عدد منفی وجود ندارد برای انیکه مانتیس را مثبت ساخته باشیم عدد (1) را با مانتیس جمع و از کرکترستیک منفی می نمائیم در مساوات تغیر نمی اید.

$$\log N = -3.0531 = -0.0531 - 3 = (-0.0531 + 1) + (-3 - 1)$$

$$= 0.09469 - 4$$

حال میتوانیم به کمک مانتیس 0.09469 ار قام عدد N را از جدول دریافت نمائیم که عبارت انداز 885 و کرکترستیک نشان میدهد که بین علامه اعشاریه و عدد 8 سه صفر قرار دارند. درنتیجه $N = 0.000885$، پس

$$anti\log(-3.0531) = 0.000885$$

انترپولیشن خطی: عملیه دریافت یک عدد نامعلومی که بین دو عدد معلوم واقع باشد به نام انترپولیشن خطی یاد می نمائیند.

هرگاه یک عدد پنج رقمی مانند عدد 1.2345 داشته باشیم نمی توانیم لوگارتم انرا از جدول چار رقمی دریافت کنیم، پس لوگارتم این قسم اعداد را درصورتیکه جدول پنج رقمی نداشته باشیم توسط طریقه انترپولیشن خطی دریافت کرده میتوانیم.

مثال: $\log 3275$ را دریافت نمائید.

حل: واضح است که این عدد ددر جدول لوگارتم چار رقمی و جود ندارد اما میدانیم که عدد 3275 بین اعداد 3280 و 3270 قرار داشته که مانتیس آنها در جدول وجود دارد یعنی

$$3270 < 3275 < 3280$$

چون در جدول اعداد 327 و 328 وجود دارد بنابرین لوگارتم آن قرار ذیل است.

$$\left[\begin{array}{ccc} \log 3270 & = & 3.5145 \\ \log 3275 & = & x \\ \log 3280 & = & 3.5159 \end{array}\right] \begin{array}{l} \left.\begin{array}{l} \\ \\ \end{array}\right] d \\ \\ \end{array} \quad 0.0014$$

فرق عدد 10 است.

یعنی

$$3275-3270=0$$
$$3280-3270=10$$
$$3.5159-3.5145=0.0014$$
$$x-3.5145=d$$

در طریقه انترپولیشن خطی می شود که این چار عدد باهم متناست اند.

$$\frac{5}{10}=\frac{d}{0.0014}=>d=\frac{5\cdot 0.0014}{10}=0.0007$$
$$d=0.0007$$

اکنون $d=0.0007$ را با عدد 3.5145 جمع می نمائیم.

$$3.5145+0.0007=3.5152$$

در نتیجه

$$\log 3275=3.5152$$

مثال: $\log 0.0007957$ را دریافت نمائید.

حل: میدانیم که

$$\log 0.0007957=\log\left(7.957\cdot 10^{-4}\right)$$
$$\log 0.0007967=\log 7.957+\log^{10-4}$$
$$\log 0.0007957=\log 7.957-4$$

کرکترستیک آن عدد 4- است و عدد 7957 در جدول لوگارتم وجود نه دارد اما لوگارتم 7.950 و 7.960 موجود است.

$$7.950<7.957<7.960$$

$$10\begin{bmatrix}\begin{bmatrix}\log 7.950 \\ \log 7.957\end{bmatrix}7 & \begin{matrix}=0.9004 \\ =x\end{matrix} \\ \log 7.960 & =0.009\end{bmatrix}0.0005$$

$$\frac{7}{10}=\frac{d}{0.0005} => d\frac{7\cdot 0.0005}{10}=\frac{7}{2}\cdot 0.0001$$

d=0.00035≈0.0004

0.9004+0.0004=0.9008

log7.957=0.9008

بالاخره

$$\log 0.0007957 = \log 7.957 - 4$$

log0.0007957=0.9008−4

log=0.0007957=$\bar{4}$.9008=−3.0992

استفاده از لوگارتم در اجرای عملیه های ریاضی: حاصل ضرب دو یا چند عدد را به کمک لوگارتم بنابر قانون $\log M \cdot N = \log M + \log N$ دریافت کرده می توانیم.

مثال:حاصل ضرب $(3.17)(88.2)$ را دریافت نمائید.

حل: به اساس قانون ضرب می نوسیم.

$$\log(3.17\cdot 88.2)=\log 3.17+\log 88.2$$

=0.5011+1.9455=2.4466

در جدول دیده می شود که مانتیس 0.4466 در جدول وجود ندارد اما در بین مانتیس های 0.4456 و 0.4472 قرار دارد.

از جدول دیده می شود که

$$anti\log 0.4472 = 2.80$$

$anti\log$0.4456=2.79

اعداد   مانتیس

$$0.01\begin{bmatrix} 2.79 & & 0.4456 & \\ \alpha\begin{bmatrix} x \\ 2.80 \end{bmatrix} & & \begin{matrix} 0.4466 \\ 0.4472 \end{matrix} & 0.0006 \end{bmatrix}0.0016$$

مناسب آنرا تشکیل می نمائیم.

$$\frac{d}{0.01}=\frac{0.0006}{0.0016}$$

$$d=\frac{0.01\cdot 0.0006}{0.0016}=\frac{0.0006}{0.0016}=0.00375$$

$$x=2.79+0.00375=2.79375$$

$$\log x=\log\left(2\cdot 79375\cdot 10^{2}\right)$$

$$x=2.79375$$

$$anti\log 2.4466=279.375$$

دریافت خارج قسمت ها به کمک لوگارتم: با استفاده از قانون دوم لوگارتم.

$$\log\frac{M}{N}=\log M-\log N$$

ما میتوانیم که خارج قسمت یک عملیه تقسیم را حاصل کنیم.

مثال: میخوایهم که خارج قسمت $\frac{8750}{3.49}$ را به کمک لوگارتم حاصل کنیم.

حل:

$$\log\frac{8750}{3.49}=\log 8750-\log 3.49$$

ازجدول لوگارتم داریم

$$\log 8750=3.9420$$

$$\log 3.49=0.5428$$

$$\log 8750-\log 3.49=3.940-0.5428$$

$$=3.3992$$

حال انکه از جدول $anti\log 3.3992=2507$ محاسبه می شود.

بنابرآن $\frac{8750}{3.49}=2507.16$ است.

دریافت طاقت ها به کمک لوگارتم: برای دریافت طاقت های که توان های آنها اعداد مکثبت تام یا کسری باشند از قانون لوگارتم استفاده می شود.

مثال: قیمت $(1.05)^{6}$ رامحاسبه نمائید.

حل:

$$\log(1.05)^6 = 6\log 1.05 = 6\cdot(0.0212)$$
$$=0.1272$$

در حالیکه $anti\log 0.1272 = 1.340$ است.

بنابرآن

$$(0.05)^6 = 1.340$$

مثال: معادله $3^{x-2} = 10$ راحل نمائید.

حل: میدانیم که

$$\log 3^{x-2} = \log 16$$
$$(x-2)\log 3=\log 16$$
$$x-2=\frac{\log 16}{\log 3}$$
$$x=\frac{\log 16}{\log 3}+2$$
$$\log 16=1.2041$$
$$\log 3=0.4771$$
$$x=\frac{1.9041}{0.4771}+2$$
$$x\approx 4$$

لکچر پنجم

پراگندگیDistribution

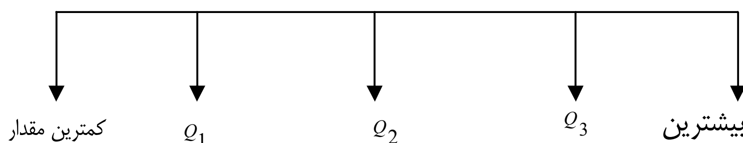
در لکچر گذشته اوسط ها را مطالعه کردیم و گفتیم که اوسط ها در قسمت مرکز توزیع فرکونسی قرار دارد اما نمیتوان گفت که نظر به اوسط دربین خود چه قسم قرار دارد مثلاً اگر بگویم که اگر دو قسم ارقام و معلومات را جمع نموده باشیم طوریکه توزیع فرکونسی ها هرکدام به صورت جداگانه ترتیب شده اند. و اوسط حسابی هرکدام 67 می باشد بزرکترین رقم توزیع فرکونسی های اولی 72 و کوچکترین رقم آن 62 است و از ارقام دومی به ترتیب 107 و 25 است.

دیده می شود که انج ارقام اولی 11 و از دومی 83 است. به همین قسم دونوع فرکونسی ها را در نظر می گریم. با آن هم که اوسط های آن محاسبه شده یکنوع است مگر نمیتوان گفت که در کدام یکی پراگندگی بیشتر و در کدام یکی کمتر است.

	توزیع A	توزیع B
اوسط حسابی	15	15
میانه	15	12
مود	15	6

مگر برای توضیح خوبتر این موضوعات به مطالعه پراگندگی ضروت دیده می شود.

ولی برای این مطلب در مرحله اول باید کوارتال (چاریک) هار تحت مطالعه قرار دهیم درینجا این موضوع را در دیاگرام ذیل به اسانی می بنیم.



اگر ارقام ذیل داده شده باشد.

12 10 15 23 14 27 16 34 41 32
18 25 31 19 43

ارقام فوق را ترتیب می دهیم.

10 12 14 15 16 18 19 23 25 27 31 32 34 41 43

بنابرین

کمترین مقدار=10 بیشترین مقدار=43

میانه=23 چاریک اول Q_1 $Q_1 = 15$

چاریک سوم $Q_3 = 32$

در دیاگرام فوق 50% ارقام درقسمت مابین (بین کوارتال اول و کوارتالسوم)، 25% بین 10و 15 و 25% بین 32 و 43 قرار دارد.

به این ترتیب دیده می شود که در کوارتال اول 25% ارقام و دوم 50% و در کوارتال سوم 75% تمام ارقام شامل اند.

در وقت محاسبه کوارتال ها مراحل ذیل باید در نظر گرفته شود.

- ارقام محاسبه بصورت صعودی ترتیب شود.
- ارقام ترتیب شده را از یک تا n شماره گذاری باید کرد.
- محل p – ام $(p=1.2,3)$ را با استفاده از رابطه ذیل بدست می آورند.

$$p \text{ ام} = \frac{p \cdot n}{4} + \frac{1}{2}$$

به این ترتیب موقعیت محل Q_1 مساوی می شود به $\frac{1 \cdot 6}{4} + \frac{1}{2} = \frac{3}{2} + \frac{1}{2} = 2$

محل Q_3 – ام آن عبارت است از $\frac{3 \cdot 6}{4} + \frac{1}{2} = \frac{18}{4} + \frac{1}{2} = \frac{18+2}{4} = \frac{20}{4} = 5$

مثلاً اگر ارقام ذیل را داشته باشیم.

80 85 90 100 120 140

این ارقام ترتیب شده اند بنابرین موقعیت دوم Q_1 مساوی است به

$$Q_1 = 85$$

$$Q_3 = 120$$

هم چنان میتوان Q یعنی کوارتال را از فورمول ذیل نیز بدست اورد.

$$Q = \frac{Q_3 - Q_1}{Q_2}$$

درینجا باید Q_1 , Q_3 را باید شناخت و برای این هدف از فورمول میانه که قبلاً داده شده است استفاده نمود. به عوض $\frac{N}{2}$ برای Q_1 تعویض $\frac{N}{4}$ صورت گیرد و در Q_3 تعویض $\frac{3N}{4}$ جای داده شود به این ترتیب درحالت ارقام تصیف شده:

$$Q_1 = L + \left(\frac{N}{4} - f\right) \cdot \frac{c}{fm}$$

$$Q_3 = L + \left(\frac{3N}{4} - f\right) \cdot \frac{c}{fm}$$

در مرحله دوم انحراف متوسط را باید تعین کرد و آن عبارت از اوسط قیمت مطلقه مجموع انحرافات از اوسط حسابی است. از اوسط حسابی هر رقم توزیع فرکونسی دریک فاصله معین قرار دارد که بعضی از این ار قام بالاتر از اوسط حسابی و بعضی پاین تر از اوسط حسابی قرار خواهد داشت و شاید یک تعداد بالای اوسط حسابی منطیق خواهد بود بالای اوسط حسابی را نقاط مثبت و پاین انرا نقاط منفی قبول می نمایم.

از او سط حسابی$\overline{x}$انحراف رقم x_i را توسط $x = x_i - \overline{x}$ نشان می دهیم و انحراف متوسط را ازین فورمول بدست می اورند.

$$A \cdot D = \frac{\sum |x_i - \overline{x}|}{n}$$

مثالi : وزن های 5 نفر بازی کنان سپورتی قرارذیل داده شده اند

20 18 16 14 12

انحراف متوسط این ارقام رابدست می اوریم

x_i	$\overline{x}$	$x - \overline{x}$	$\lvert x - \overline{x} \rvert$
20	16	4	4
18	16	2	2
16	16	0	0
14	16	-2	2
12	16	-4	4
$\sum x = 80$		$\sum x_i - \overline{x} = 0$	$\sum \lvert x_i - \overline{x} \rvert = 12$

$$A\cdot D=\frac{\sum|x_i-\bar{x}|=12}{n}=\frac{|4|+|2|+|0|+|-2|+|-4|}{5}=$$

$$=\frac{4+2+0+2+4}{5}=\frac{12}{5}=2\frac{3}{5}=2.4$$

مثال ii: درست های ذیل کدام ارقام یکی به دیگری نزدیکتر اند.

$\{3\ ,\ 3\ ,\ 3\ ,\ 15\ ,\ 15\ ,\ 15\}$ (a

$\{3\ ,\ 6\ ,\ 8\ ,\ 10\ ,\ 12\ ,\ 15\}$ (b

$\overline{x_1}=\frac{3+3+3+15+15+15}{6}=\frac{54}{6}=9$ (a

$$A\cdot D=\frac{1}{6}\left(|3-9|+|3-9|+|3-9|+|15-9|+|15-9|+|3-9|\right)=$$

$$=\frac{1}{6}(6+6+6+6+6+6)=\frac{36}{6}=6$$

$\overline{x_2}=\frac{3+6+8+10+12+15}{6}=\frac{54}{6}=9$ (b

$$A\cdot D=\frac{1}{6}\left(|3-9|+|6-9|+|8-9|+|10-9|+|12-9|+|15-9|\right)=$$

$$=\frac{1}{6}(6+3+1+1+3+6)=\frac{1}{6}\cdot 20=\frac{20}{6}=3\frac{1}{3}$$

از حل های $b\ ,a$ نتیجه می شود که درست b ارقام یکی به دیگری نزدیکتر اند زیرا انحراف متوسط آن کوچکتر است. در ارقام تنصیف شده انحراف متوسط توسط فورمول ذیل بدست می اید.

$$A\cdot D=\frac{\sum f_i|x_i-\bar{x}|}{\sum f}$$

انحراف معیاری: انحراف معیاری عبارت از همان اصل است که توسط آن میتوان انحراف ارقام را از اوسط حسابی محاسبه کرد و آن توسط فورمول ذیل محاسبه می شود.

$$S=\sqrt{\frac{\sum|x-\bar{x}|^2}{n}}$$

و اگر ارقام تنصیف شده باشد درینصورت توسط فورمول ذیل محاسبه می گردد.

$$S=\sqrt{\frac{\sum f,|x-\bar{x}|^2}{n}}$$

مثال i: انحراف معیاری ارقام ذیل را محاسبه نمائید.

$\{1\ ,\ 5\ ,\ 3\ ,\ 1\ ,\ 2\ ,\ 6\ ,\ 6\ ,\ 8\}$

$$\bar{x} = \frac{1+5+3+1+2+6+6+8}{8} = \frac{32}{8} = 4$$

$$S = \frac{\sqrt{|5-4|^2+|1-4|^2+|3-4|^2+|1-4|^2+|2-4|^2+|6-4|^2+|6-4|^2+|8-4|^2}}{8} =$$

$$= \frac{\sqrt{1+9+1+9+4+4+4+16}}{8} = \sqrt{\frac{48}{8}} = \sqrt{6} = 2.45$$

مثال ii: انحراف معیاری ارقام ذیل را محاسبه نمائید.

$\{6\ ,\ 6\ ,\ 4\ ,\ 6\ ,\ 4\ ,\ 2\ ,\ 8\ ,\ 8\ ,\ 8\ ,\ 2\ ,\ 2\ ,\ 6\ ,\ 6\}$

x_i	تالی	f_i	$f_i\ x_i$	$\bar{x}$	$x_i-\bar{x}$	$(x_i-\bar{x})^2$	$f_i(x-\bar{x})^2$
6	~~IIII~~	5	30	5.23	−0.77	0.59	2.95
4	II	2	8	5.23	1.23	1.51	3.02
2	III	3	6	5.23	3.23	10.43	31.29
8	III	3	6	5.23	2.77	7.67	23.01

$$S = \sqrt{\frac{1}{13}\sum fi\left(xi-\bar{x}\right)^2}$$

$$= \sqrt{\frac{1}{13}\left(2.95+3.02+31.29+23.01\right)}$$

$$= \sqrt{\frac{1}{13}\left(60.27\right)} = \sqrt{4.64} = 2.15$$

واریانس: عبارت از مربع انحراف معیاری است یعنی

$$V = S^2 = \frac{\sum fi|x-\bar{x}|^2}{n}$$

که در مثال قبلی

$$V = (2.15)^2 = 4.64$$

در فورمول فوق به عوض x_i باید وسط صنفی را درنظر گرفت $\bar{x}$ اوسط ارقام تنصیف شده و f_i فرکونس صنف مورد نظر است.

مثال: درین جدول ذیل وزن ها 100 نفر شاگردان داده شده انحراف معیاری و وریانس این اوزان را بدست ارید.

صنف	f_i	وسط صنفی	$x_i-\bar{x}$	$(x_i-\bar{x})^2$	$f_i\|x-\bar{x}\|^2$
$60-62$	5	61	-6.45	41.6025	208.0125
$63-65$	18	64	-3.45	11.9025	214.2450
$66-68$	42	67	-0.45	0.2025	8.5050
$69-71$	27	70	2.55	6.5025	175.5675
$72-74$	8	73	5.55	30.8025	246.4206
	$\sum f_i=100$				$\sum f_i(x-\bar{x})^2=852.75$

$$S=\sqrt{\frac{\sum f_i(x_i-\bar{x})2}{n}}=$$

$$=\sqrt{\frac{852{\cdot}75}{100}}=\sqrt{8.5275}$$

$$=2.92$$

و وریانس: $V=S^2=8.5275$

تمرین:

i) جدول ذیل را درنظر بگیرید.

صنف	f
14 – 15	3
12–13	0
10–11	15
8–9	20
6–7	10
4–5	4

انحراف معیاری و واریانس ارقام فوق را بدست ارید.

ii) انحراف معیاری و واریانس ارقام ذیل را بدست ارید.

$$9, 11, 12, 12, 14, 15, 16, 16, 17, 17, 17, 17, 17$$

iii) ارقام ذیل داده شده اند.

100 90 80 120 160 140 85

Q_1 را بدست ارید.

Q_2 را بدست ارید.

Q_3 را بدست ارید.

ارقام بعد از میانه را تعین نمائید.

ارقام قبل از میانه را بدست ارید.

احصاییه(Statistics)

کلمۀ احصائیه ابتدا در ساحات سیاسی، به مفهوم معلومات عددی تعبیر می شد. مثلاً در مورد احوال نفوس، بعضاً در تشکیلات دولتی اداراتی درین مورد سروکار داشتند.

چنانجه در کشور ما ریاست تسجیل نفوس و ریاست احصائیه مرکزی.

احصائیه به معنی علم جمع آوری ارقام و کمیت ها، تنظیم، تحلیل، تعبیر و ارایه کردن آن هاست علاوه بر جمع اوری معلومات، احصائیه جوانب پلان کردن و طرف جمع آوری ارقام را نیز در بر می گیرد.

بعضی دانشمندان، احصائیه را یک مجموعه ای ریاضیکی می دانند که به جمع آوری معلومات (ارقام)، تحلیل کردن، تعبیر کردن، توضیح و معرفی، راجع می گردد و بعضی هم احصائیه را بحث مخصوص از ریاضی می دانند که با جمع آوری ارقام، تحلیل و تعبیر آن ها سرو کار دارد و از نظر تمرکز آن در ساحات عملی، علم متمایز ریاضیکی می دانند نه بحث ریاضی، مثلاً مطمئن بودن از اینکه ارقام به روشی تهیه شده باشد تا نتایج لازم از آن گرفته شود، نگاه داری گردد و جهت مقایسه بکار برده شود، مانند جدول سازی، خلاصه کردن، نوشتن راپور وغیره...

اولین نوشته در مورد احصائیه، تحت عنوان «الرساله فی استخراج المعما» توسط الکندی در قرن نهم میلادی، پنداشته می شود. و در کتاب خود طور مشرح نوشته بود که پیام های رمزی چگونه خوانده می شود و اینکه از قواعد تعدد و قوعات حروف (*Frequency distribution*) چگونه استفاده بعمل آید. این نظریه به اساس علم تحلیل رموز (شفر) (*Cryp* tan *alysis*) و احصائیه شمرده می شود که طی قرون متمادی رو به تکامل گذاشت.

در زمان ما در عصر تکنالوژی معلوماتی، یک ضرورت عینی است که بدانیم معلومات چگونه پروسس می شود و به چه ترتیب آنرا به دانش قابل استفاده و قابل ترجمه تبدیل می گردد و به این ترتیب اهمیت محاسبات احصائیوی هنوز بیشتر نمایان می گردد. احصائیه بحیث یک موضوع در نصاب تعلیمی سابقه، تدریس نمی شد اما در نصاب جدید، برای صنوف نهم و بالاتر از آن، جزء مفردات درسی می باشد.

هدف اساسی این مضمون، عبارت از تهیۀ معلومات مربوط مسایل احصائیوی برای معلمان محترم بحیث ممد درسی می باشد.

احصائیه و احتمالات با همدیگر روابط نزدیک دارند، مگر تفاوت کمی در این است احتمالات، در تیوری یک مجموعه (جمعیت) و پارامتر های داده شدۀ آن مانند اوسط، مود، فاصله و غیره وقوع حوادث اتفاقی را در یک نمونۀ کوچک مطالعه مینماید، یعنی اوصاف کُل در جزء آن جستجو می شود و با درنظرداشت اصل قیاسی (*Deduction*) ادعا و یا فرض می شود که این نمونه یا جز هر دانه یا جزء در آن جمعیت، یا ست مربوط می گردد و یا قسمتی از آن است بر عکس محاسبۀ احصائیه، یک قسمتی از نفوس یا جمعیت را تحت مطالعه قرار داده و با درنظرداشت استقراء (*Induction*)، صفت های حاصل شده از یک جز، به کُل تعمیم داده میشود.

مفاهیم موضوع احصائیه در کتب درسی

درین اواخر، احصائیه بحیث بخشی از ریاضی، در کتب ریاضی آمده، طوری که تعداد اصطلاحات آن برای مفاهیم متفاوت استعمال شده و یا غیر معیاری ترجمه گردیده است. دانشمندان ما قبلاً برای تعدادی مفاهیم احصائیوی، اصطلاحات مناسب و معادل تعین و استعمال کرده اند که درینجا می خواهیم که ان ها را در عوض کلمات نا مانوس، مورد استفاده قرار دهیم. از طرف دیگر مفاهیم احصائیه طور نظری و مبهم تحلیل گردیده اند که وضاحت ندارند. چون معلمان محترم و شاگردان با این مفاهیم سرو کار دارند. باید موضوعات مربوط، وضاحت داده شوند.

مفاهیم احصائیوی

جهت توضیح مفاهیم مختلف احصائیه، مثال ذیل را در نظر می گیریم و بعداً مفاهیم مروج و معمول را با در نظرداشت آن مطرح مینمائیم.

مثال. در دو جدول ذیل، نمرات ریاضی امتحان سالانه صنف دهم، لیسهٔ لیلیهٔ پکتیکا داده شده، میخواهیم ارقام احصائیوی آن را بر اساس دانش احصائیه خلاصه، تحلیل و مقایسه کنیم.

4. **جمعیت (Population):** ست تمام واحداتی که نمونه از آن گرفته شده باشد، جمعیت گفته میشود. در مثال فوق دو صنف مذکور نمونهٔ کوچکی از تمام صنوف دهم کشور ما می باشد. تمام شاگردان صنوف دهم مملکت، جمعیت گفته میشود. در کتب درسی بعضاً بنام صنف نفوس و یا نام های دیگری گفته شده. مگر اصطلاح مناسب و مروج، جمعیت است.

مثال. تمام مکاتب کشور، یک جمعیت و تعدادی از مکاتب نمونه آن می باشد. هر مکتب یک واحد (حالت مشاهدوی) است. مکاتب پکتیکا یک ست فرعی از مکاتب مملکت است و این دو مکتب یک نمونه از مکاتب پکتیکا می باشند.

5. **نمونه (Sample):** قسمتی از یک جمعیت را که غرض تحقیق و مطالعه انتخاب می گردد، بنام نمونه یاد می کنند. مطالعهٔ تمام جمعیت (تمام عناصر یک ست) اکثراً ناممکن است. جهت تعین تعدادی از صفت های یک جمعیت، این صفت ها در یک نمونهٔ منتخب تحت مطالعه قرار داده میشود و نتایج بدست آمده از آن بر اساس قواعد احصائیوی به کل جمعیت، منسوب می گردد (مشت، نمونهٔ خروار) حدود نمونه ساحه ای که، نمونه از آن انتخاب می شود، یعنی لست تمام واحدات، عبارت از حدود نمونه است. مثلاً شاگردان صنوف دهم تمام مکاتب پکتیکا که مطالعهٔ نتایج ریاضی در آن هدف می باشد، پس تمام صنوف دهم ولایت، حدود این نمونه می باشد.

نمونهٔ تمثیلی: نمونه ای که نمایندگی خوب از یک جمعیت را داشته بتواند. مثال فوق، یک نمونهٔ خوب بوده نمیتواند، بخاطر اعتبار بهتر تحقیقات، شاید کافی نباشد شاید نیاز مندی به صنوف زیادی وجود داشته باشد تا نتایج ریاضی را با مشخصات و صفات مربوط در مورد ادعا نمود.

نمونهٔ اشتباه: نمونه ای که طور اتفاقی از یک جمعیت انتخاب گردد و بر عکس نمونهٔ غیر احتمالی باشد.

6. **واحد (Case):** قسمتی از مطالعه، که صفت های آن تحت تحقیق و بررسی قرار میگیرد، واحد گفته میشود. واحد مشاهده میتواند افراد باشد (شاگردان، معلمان) یا آشیأ باشد مانند اداره (مکاتب) سازمان ها، خانواده، شهرها، کشورها، محصولات صنعتی مانند پرزه جات، مواد خوارکی وغیره.

مثلاً وقتی اگر در مورد شاگردان صنف دهم تحقیق صورت می گیرد، پس تمام شاگردان صنوف دهم کشور، عبارت از جمعیت است. آن صنوفی که جهت مطالعه در نظر گرفته می شوند، نمونه هستند و آن شاگردانی که از نمونه جهت بررسی در نظر گرفته شده اند، واحد هستند یعنی هر شاگردی که معلومات از آن گرفته میشود، واحد است. معلوماتی که از یک شاگرد اخذ می گردد، متحول گفته میشود. مثلاً نمرۀ شاگردان عمر، تعلیم والدین، عواید ماهانه و غیره.

7. **متحول (Variable):** متحول با درنظرداشت یک صفتی از موضوع است که واحدات مطالعه، با درنظرداشت آن از همدیگر تفکیک می شوند که این مشخصه (متحول) نظر به مشاهدۀ واحدات، متفاوت می باشد.

مثلاً در جدول داده شده، نمرات شاگردان، عمر آنها، جنسیت وغیره متحولین میباشند که حالات مشاهده شده نظر به آن ها، در افراد مختلف از همدیگر متفاوت اند، مانند عمر، عاید خانواده، اما بعضی متحولین از یک گروپ با گروپ دیگر فرق می کنند. چنانچه معلم یک صنف برای هر شاگرد صفات یکسان دارد و برای این صنف، معلم یک متحول ثابت است. اما معلمان صنوف، از همدیگر فرق دارند، پس صفات آن ها نظر به صنوف متحول هستند.

توصیفی احصایی برای یک متحول محاسبه می شود که یک متحول تحلیلی (Univivawiate analysis) گفته میشود.

مثلاً برای شاگردان

- اوسط نمرات تمام شاگردان
- مود و میدیان (میانه) نمرات شاگردان
- انحراف و انحراف معیاری
- مقاسیۀ نمرۀ شاگردان (فیصد نمرات در گروپ ها)

هرگاه روابط بین متحولین را بررسی کنیم، درینصورت تحلیل دو متحوله (Bi-Variate Analysis) انجام می شود. در تحلیل دو متحول، یکی از آن ها متحول مستقل و دیگری متحول تابع بوده، ارتباط شان در نظر گرفته میشود. ارتباط میان دو متحول به این مفهوم است که آیا با تغیر یک متحول، متحول دومی هم آهنگ می باشد؟ یا نه؟ این موضوع بنام تحلیل رابطۀ متقابل (Correlation Analysis) یاد می گردد که در کتاب صنف دوازدهم آمده است. مثلاً آیا نمرات شاگردان با جنسیت شان ارتباط دارد؟ یا خیر؟ یا اینکه نمرات شاگردان با عمر ایشان رابطه دارد یا نه؟ یا اینکه اوسط نمرات یک صنف با اوسط نمرات صنف دیگر چه رابطه دارد.

و اینکه این تفاوت به چه دلایل و عواملی توجیه می شوند. مثلاً نظر به عمر، جنس، تجربۀ معلم وغیره...

اصطلاحات ارقام (Data): معلومات و دانش بسیاری اوقات با همدیگر مخلوط استعمال می شوند. گفته می شود که تفاوت بین این سه اصطلاح، وابسته به درجۀ تجرد آن ها است.

یعنی داتا شی عینی است و از دیگران سویه تجربه آن پائین تر میباشد.

معلومات از نظر تجرد دوم و دانش بلندترین سطح تجرد میباشد. طور مشخص داتا مفهوم خاصی ارایه نمی کند، داتا (ارقام) سمبول های اند وقتیکه بیک شی راجع می شوند، بنام معلومات گفته یاد می گردند. مثلاً 1.50 متر یک رقم است که فقط یک مقدار را ارایه می کند و اینکه «بلندی قد شاگردان 1.50 متر میباشد» باز معلومات دانسته می شوند. برای اینکه داتا به معلومات تبدیل شوند، پس باید تعبیر شوند و به آن ها معنی داده شود. مثلاً بلندی قلۀ تراجمیر معمولاً داتا (ارقام) گفته میشود. و اما از نظر مشخصات جیولوژیکی یک کتاب، ممکن معلومات گفته شود و اما قلۀ تیراجمیر از نظر راپور کوه نوردی و بالا رفتن شاید، دانش گفته شود. ارقام جمع آوری شده یک پدیده مثلاً قد شاگردان ارقام (داتا) یک قسم اشاره و نشانی دارد که معلومات گفته میشود که به ترتیب دانش ما را افزایش می دهد.

احصائیه توصیفی (Descriptive Statistics): دانش تنظیم و خلاصۀ کردن ارقام و معلومات جمع آوری شده عبارت از احصائیه توصیفی است. به کمک محاسبه احصائیه توصیفی مشخصات اساسی ارقام و معلومات جمع آوری شده از نظر کمی توصیف و بیان می شوند و به این ترتیب معلومات بدست آمده بیک شکل معنی دارد تنظیم و خلاصه می گردد. احصائیه توصیفی از احصائیه استنتاجی (Interfrental Statistics) یا احصائیه استقرایی (Inductive Statistics) این تفاوت را دارد که هدفش فقط به طور نمونوی خلاصه گیری می باشد، بدون اینکه در مورد فشاء اصلی آن چیزی گفته شود.

جهت خلاصه کردن مقدار زیاد معلومات جمع آوری شده، در احصائیه توصیفی از محاسبات کمی خلاصه گیری یا محاسبات بصری استفاده می گردد. تعدادی از محاسبات کمی قرار ذیل معرفی میشوند.

1. معیارهای تمرکز (Central Tendency): مود، میانه و اوسط
2. معیار های پراگندگی (Measures of dispersion): انحراف، انحراف معیاری
3. توزیع (Distribution): جدول فریکونسی.

مود (عدد کثیرالوقوع) (Mode): در یک جدول اعداد، عددی که بیشتر تکرار شده باشد میانه (Median) در صورتیکه اعداد یک جدول نظر به مقدار ترتیب شده باشند، میانه عبارت از عدد وسطی است.

اوسط (Average): اوسط عبارت از حاصل تقسیم مجموع اعداد داده شده و تعداد آن ها است. که بنام اوسط حسابی نیز گفته می شود.

وسعت (R): وسعت عبارت از فرق بین بزرگترین و کوچکترین کمیت جدول است یعنی حاصل تفریق اعظمی و اصغری می باشد.

انحراف:

انحراف معیاری ((StD (Standard Devision): فرق هر کمیت متحول از اوسط آن، را انحراف آن می گویند و اوسط تمام انحراف های مربوط را انحراف معیاری نامند. بعضی کمیت ها از اوسط بیشتر و بعضی ها از آن

کمتر می باشند، به عبارت دیگر برای کمیت ها و قابل مشاهده، انحراف گاهی و گاهی منفی است. از همین سبب، جهت دریافت انحراف معیاری (اوسط انحراف ها)، اول تفاوت های مربوط را مربع کرده و باز جذر آن ها را میگیرند.

اوسط مربعی یا واریانس (Variance): عبارت از انحراف معیاری مربع شده است، یعنی:

$$\frac{\sum(x-\bar{x})^2}{n-1}$$

ضریب انحراف (Variance Coefficient): ضریب انحراف، نسبت تشتت و اوسط است، یعنی نسبت انحراف معیاری و اوسط می باشد. این مقدار مقایسهٔ دو انحراف معیاری را نشان می دهد. مثلاً اگر وسط ها و انحراف های معیاری دو متحول با هم تفاوت داشته باشند، به کمک ضریب انحراف با هم مقایسه شده می توانند اگر ضریب انحراف هر کدام که بیشتر با شد میتوان گفت که نسبت تشتت آن از اوسط است و نسبت به آن دیگری زیادتر تشتت است. این ضریب فقط برای آن متحولین محاسبه شده می تواند که قیمت منفی نگرفته باشد.

$$Cv = \frac{\sigma}{\mu}$$

توزیع (D): عبارت از فیصدی مقادیر مشاهدات است و در مورد شکل آن ها معلومات ارایه می کند. جهت نشان دادن توزیع از تعدد وقوعات یا کثرت یا فریکونسی (Frequency) استفاده می گردد.

فریکونسی یا تعدد وقوعات (F): فریکونسی یا تعدد وقوعات که در کتب درسی کثرت گفته شده، نشان می دهد که در یک مشاهده چند دفعه تکرار گردیده و مقدار این تکرار چند فیصد میباشد. یعنی فریکونسی در تمام جدول عبارت از فیصدی هر مشاهده می باشد. معمولاً اگر تعداد مشاهدات زیاد و مقادیر آن ها هم مختلف باشد درینصورت مقادیر به گروپ ها تقسیم می شوند که به نام «ارقام گروپ بندی شده» یاد می گردند.

در جدول مثال ذیل تعداد هر نمرهٔ شاگردان و فیصدی آن ها محاسبه گردیده است.

اما جهت محاسبات بصری یعنی غرض ساختن گراف ها، نمرات این شاگردان به گروپ ها تقسیم می گردند و فریکونسی هر گروپ و فیصدی آن محاسبه شده و جهت ساختن گراف ها از آن استفاده گردیده است.

توزیع نورمال (Normal Distribution): توزیع نورمال، عبارت از یک منحنی منظم است که فریکونسی یک شی را طوری نمایش می دهد که به دو سمت اوسط متناظر می باشند یعنی اوسط آن محور تناظر است و کمیت های دیگر در دو سمت آن توزیع گردیده اند.

منحنی نورمال مانند زنگ (زنگوله) است.

فیصدی (Percentile): در احصائیه، آن قیمت متحول را، فیصدی می گویند که یک فیصدی کمیت ها از آن پائینتر واقع شده باشند، طوریکه از نام آن معلوم می شود، فیصد، کمیت های جدول را به صد قسمت منقسم می نماید.

مثلاً اگر عبدالقدیر در صنف خود دهم نمره باشد و شاگردان تماماً 50 نفر باشند، اگر 40 نفر از عبدالقدیر نمرهٔ پائین گرفته باشندو در زبان احصائیه می گوئیم که عبدالقدیر 80 فیصد نمره دارد، یعنی 40/50 یا 80٪ شاگردان از

عبدالقدیر کمتر نمره گرفته اند. بهمین قسم اگر «درصنف یازدهم 20 فیصد نمره شاگردان در امتحان سالانهٔ ریاضی، 75 باشد» این مفهوم را دارد که 20 فیصد از 75 نمره، کمتر دارند.

بصری محاسبه، گراف ها و جداول ساده هستند معمولاً گراف ها چارت های میله ای، هستوگرام یا دایروی اند، (مثال ذیل).

مثال: صنوف 4 دهم الف، ب در یک مکتب دارای تعداد مجموعی 60 شاگرد می باشند که نمرات یک مضمون امتحان سالانهٔ آنها در جدول ذیل داده شده:

82	97	70	72	83	75	76	84	76	88	80	81	81	52	82
82	73	98	83	72	84	84	76	85	86	78	97	97	82	77
84	76	88	80	81	81	52	82	82	97	70	72	83	75	76
85	86	78	97	97	82	77	82	73	98	83	72	84	84	76

درینصورت احصائیهٔ توصیفی آنرا محاسبه کنید.

در مثال فوق نمرهٔ شاگردان متحول، عدد هر نمره یک مشاهده و هر شاگرد خودش یک واحد است.

همین اعداد (نمرات شاگردان) ارقام (داتا) اند، بدون اینکه مثلاً نمرهٔ احمد 82 و محمود 97 و غیره اند، چیزی دیگری از ان فهمیده نمی شود. این ارقام مشاهدات هم گفته می شوند زیرا دیده شده اند. اما اینکه تماماً 30 نفر اند و کمترین نمرهٔ آن ها 52 و بلند ترین نمره 98، اوسط نمرات 81.1 می باشد وغیره معلومات است.

مود: عددی که بیشتر در جدول دیده می شود 82 است که در بین 60 مشاهده، 8 دفعه تکرار شده، پس مود Mod=82.

میدیان یا میانه: دیده میشود که تعداد مشاهدات عدد جفت 60 است، پس میانه عبارت از اوسط دو عدد وسطی می باشد، اگر به بینم 82 عددی است که 29 مشاهده از آن بالا و همین قدر اعداد از آن پائین می باشد. پس میانه جدول Mod=82.

اوسط: مجموعهٔ تمام نمرات 4866 می شود و تعداد آن ها 60 است، پس روابط آن:

$$A = \frac{4866}{60} = 81.1$$

وسعت (فاصله): دیده می شود که قیمت اعظمی مشاهدات 98 و اصغری آن 52 می باشد پس وسعت جدول عبارت است از:

$$R = Max - Min = 98 - 52 = 46$$

انحراف معیاری کمی پیچیده است و فورمول آن قرار ذیل داده شده

$$Std=\sqrt{\frac{\sum(x-\overline{x})^2}{(n-1)}}$$

طبق جدول ذیل، جهت محاسبهٔ انحراف معیاری، اول انحراف هر مشاهده و اوسط آن دریافت می شود باز آن را مربع کرده (ستون ز) و آن را با تعداد ضرب (ستون ح) باز مجموعه مربعات همه انحرافات (ستون ح) را جمع کرده، عدد بدست آمده 5021.4 بر تعداد یک واحد کمتر از تعداد مجموع تقسیم و آن را جذر می گیریم.

ح	ز	ر	هـ	د	ج	ب	الف
مشاهده (نمرات) Ai	تعداد وقوع فریکونسی (n)	مجموع $(n*Ai)$	فیصدی فریکونسی مشاهدات $n/600*100=F$	فیصدی متراکم (مجموعهٔ قبلی)	انحراف هر مشاهده از اوسط $(A-Ai)$	مربع انحرافات خاص $(A-Ai)^2$	مجموعهٔ مربعات تمام انحرافات خاص
52	2	104	3,3%	3,0%	-29,1	846,81	1693,62
70	2	140	3,3%	6,7%	-11,1	123,21	246,42
72	4	288	6,7%	13,3%	-9,1	82,81	331,24
73	2	146	3,3%	16,7%	-8,1	65,61	131,22
75	2	150	3,3%	20,0%	-6,1	37,21	74,42
76	6	456	10,0%	30,0%	-5,1	26,01	156,06
77	2	154	3,3%	33,3%	-4,1	16,81	33,62
78	2	156	3,3%	36,7%	-3,1	9,61	19,22
80	2	160	3,3%	40,0%	-1,1	1,21	2,42
81	4	324	6,7%	46,7%	-0,1	0,01	0,04
82	8	656	13,3%	60,0%	0,9	0,81	6,48
83	4	332	6,7%	66,7%	1,9	3,61	14,44
84	6	504	10,0%	76,7%	2,9	8,41	50,46
85	2	170	3,3%	80,0%	3,9	15,21	30,42
86	2	172	3,3%	83,3%	4,9	24,01	48,02

88	2	176	3,3%	86,7%	6,9	47,61	95,22
97	6	582	10,0%	96,7%	15,9	252,81	1516,86
98	2	196	3,3%	100,0%	16,9	285,61	571,22
مجموعه	**60**	**4866**	**100%**				**5021,4**

طوری که در جدول فوق دیده میشود مجموعهٔ همه انحرافات 5021.4 میباشد و آن را بر 59 تقسیم مینمائیم که 85.1 می شود و جذر مربع 85.1 مساوی 9.2 است، پس واریانس آن 85.1 و انحراف معیاری آن: $tsd = 9.2$

انحراف معیاری، دو مشاهده را طوری مقایسه می کند که در اطراف اوسط پراگنده شده اند، یعنی ممکن است دو مشاهده دارای عین اوسط باشند ولی انحراف های آن ها متفاوت باشند.

مثلاً اگر اوسط نمرات یک صنف دیگر هم 81 و انحراف معیاری اش 15 باشد پس گفته میتوانیم که صنف دوم نسبت به صنفی اولی دارای پراگندگی بیشتری است.

یعنی نمرات شاگردان در اطراف اوسط نسبتاً دور تر واقع شده اند. ازین دستاورد نتیجه می شود که در صنف دومی بعضی شاگردان لایق و بعضی ضعیف اند، در حالی که شاگردان صنف اولی از نظر سویه باهم نزدیک اند.

جهت محاسبه قیمت ضریب انحراف، انحراف معیاری ($std = 9.2$) را قیمت بر اوسط $A = 81.1$ تقسیم مینمائیم، پس ضریب انحراف عبارت است از:

$$0.11 = 9.2/81.1$$

جهت دریافت یک فیصدی، ستون فیصدی متراکم را می بنیم و هر فیصدی را که بخواهیم بدست می آوریم، مثلاً 20 فیصد نمرات 75 است 80 فیصد آن 85 وغیره میباشد.

در جدول فوق، فریکونسی در ستون (د)، فیصدی متراکم در ستون (هـ) هم محاسبه شده است.

که جهت تشخیص محاسبات بصری (گراف ها) به کار می آید.

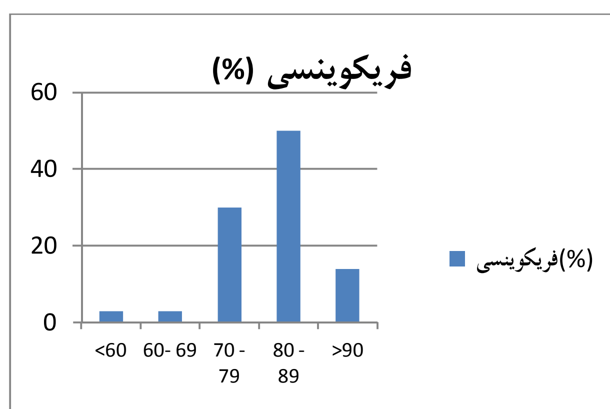
در شکل ذیل نمونه های گراف های میله ای و دایروی را می بنید. در گراف میله ای، کتگوری نمرات روی محور افقی و مقادیر فیصدی آن ها بالای محور عمودی نشان داده شده است.

در گراف دایروی، سطح داخل دایره به تناسب کته گوری نمرات منقسم گردیده در ذیل نمونه های محاسبات بصری را دیده میتوانیم.

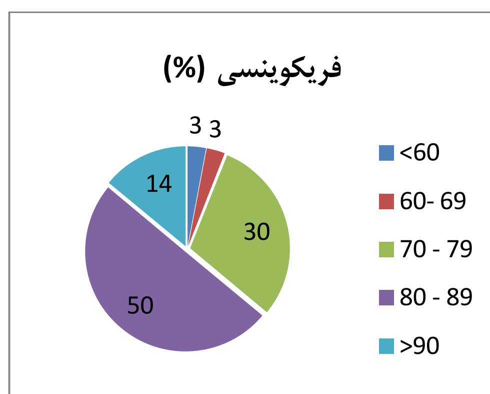
2. فریکونسی نمرات شاگردان

فریکونسی (%)	کتگوری نمرات
3.3 %	<60
3.3 %	60-69
30%	70-79
50%	80-89
13.3 %	>90
100%	

گراف میله ای فریکونسی شاگردان



گراف دایروی فریکونسی شاگردان



مثال معرفی منحنی نورمال: هرگاه در امتحان یک صنف از یک فاکولته که تعداد محصلان آن 200 نفر است، اوسط نتایج 71 و انحراف معیاری 7 باشد، استاد منحنی نورمال را مورد استفاده قرار دهد، نتایج طبق گراف ذیل ارایه میگردد:

جدول نتایج 200 نفر محصلان

نمرهٔ امتحان	درجات	تعداد محصلان هر درجه	فیصدی درجات بدست آمده
85 و بالاتر از آن	A	5	2,5%
84 – 78	B	27	13,5%
64 – 77	C	136	68,0%
57 – 63	D	27	13,5%
کَته تر 57	F	5	2,5%
مجموعه	**5 درجه**	**200**	**100,0%**

در توزیع نورمال:

1. تقریباً %68 مشاهدات، برابر انحراف معیاری نزدیک اوسط واقع است.
2. تقریباً %65 مشاهدات، به دو سمت انحراف معیاری، نزدیک اوسط قرار دارد.
3. تقریباً% 99.8 مشاهدات، سه برابر انحراف معیاری در نزدیک اوسط واقع است.

طوری که از جدول فوق و گراف ذیل دیده میشود، می بنیم که 64 از اوسط یعنی از 71 به اندازهٔ 7 (مساوی به انحراف معیاری) کمتر است. یعنی

$$average - 1\ \ std \ = \ 71 - 64 = 7$$

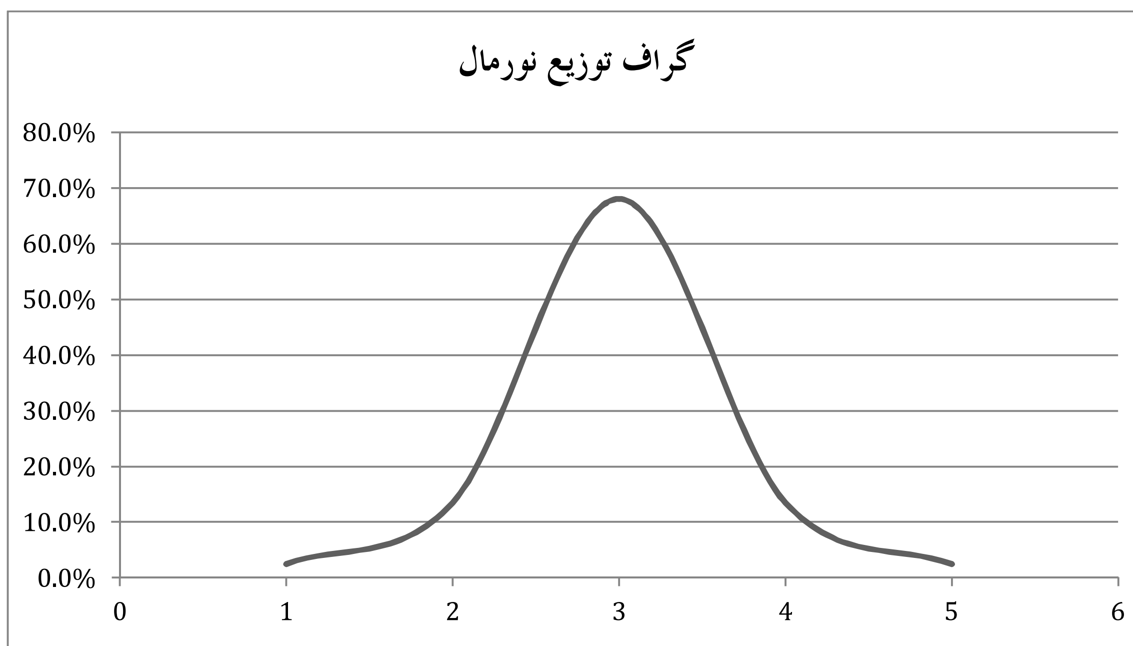
بهمین قسم 78 از اوسط (71) به قدر 7 (یک برابر انحراف معیاری) بیشتر است، یعنی

$$average + 1\ \ std \ = \ 71 + 7 = 78$$

تمام نمرات %68 یا 136 از 200 درین ساحه یعنی از 64 تا 78 قرار دارد، یعنی به اندازهٔ 7 در دو سمت اوسط موقعیت دارد.

از جملهٔ 200، عدد 190 (%95) از اوسط نمرات از (71) به اندازهٔ دو برابر انحراف معیاری به سمت های پائین و بالا واقع می باشد، یعنی

$$average\ -2\ \ std \ = \ 71 - 2 \cdot 7 = 57$$
$$average\ +2\ \ std \ = \ 71 - 2 \cdot 7 = 85$$



مواد: مواد ممد این موضوع به اندازۀ محتویات کتاب صنف دهم

طریقه تدویر لکچر: درس توضیحات دو نفری، گروپ کاری 4 نفری، درس تنهایی، تشریحات و توضیحات، حل مسایل و سوالات.

پلان لکچر

وقت	فعالیت ترینر	فعالیت متوقعۀ شاملین	مواد
5 دقیقه	مواد جهت خواندن، یک روز قبل توزیع گردد		
15 دقیقه	مواد ممد احصائیه را بخوانید و بگوئید که احصائیه یعنی چه چرا راجع به مبادی علوم، معلومات مهم است؟ این نوع معلومات کدام مهارت را تقویت می کند؟	طور دو نفری بخوانید و برای جواب آمادگی بگیرید.	مواد ممد درسی کتاب ها
10 دقیقه	راجع به تسمیه و تاریخ احصائیه، توضیح مختصر ارایه می دهیم (از دو صفحۀ اول مواد ممد درسی)	بشنوید و پرسان کنید	تخته و تباشیر
20 دقیقه	از مواد ممد احصائیه صفحات ( ) را به تنهایی بخوانید. در ختم ترینر، اهمیت مفاهیم و اصول اساسی احصائیه را برای شاگردان بیان می کند.	هر یک به تنهایی بخوانید و نظریات خود را بیان کنید.	کتاب کیمیای صنف دهم

	باید تاکید گردد که شاگردان به وقت کافی و رهنمایی ضرورت دارنـد، تا بدانند که این مفاهیم چه معنی دارند و در امور زنده گی چـه کـاربرد های داشته میتوانند. نقاط مهم: موضوع احصائیه در کتـب درسـی، موضـوع جدیـد اسـت و بسیاری اصطلاحات آن نا آشنا می باشد و مهم است که معلم مطمـئن گردد ازینکه شاگردان موضوع را درک می کنند. اینکه احصائیه بر خلاف سایر مباحث ریاضی، ریاضـی عملـی میباشـد، پس باید برای تدریس شاگردان دلچسـپ سـاخته شـود و ایـن زمـانی ممکن است که معلمان موضوعات را درک کنند و مفاهیم کتب درسـی را بدانند و مثال ها را با تمرین های آن حل کرده بتوانند. احصائیه به محاسبات سادۀ ریاضیکی مفاهیم و حسابی نیازمند اسـتو و درک مفاهیم آن مهم می باشد.	شنیدن	
20 دقیقه	گروپ کار: شاملین در گروپ های چهار نفری تقسیم شدند و 1. هر گروپ صفحات 2-5 مواد ممد احصائیه را بخواننـد و در ارتباط به نکات ذیل راپور مشترک تهیـه و ارایـه کننـد و بـه صنف معرفی نمایند. • مفاهیم اساسی را لست کنید: • معنی استقراء و استنتاج چه است؟ • استنتاج از طریق احصائیه چگونـه میباشـد؟ و معنـی آن چی است؟ • کدام مفاهیم مغلق و قابل توضیح بیشتر اند؟ • آیا این مفاهیم، کتب درسی را احتوا می کنند؟ یـا خیـر؟ اگر نواقص داشته باشد، آن را اصلاح کنید. • در کتاب کدام صنف، مسایل توضیح نشده اند؟	شـــــــاگردان در گـــروپ هـــای 4 نفـــری تقســـیم شوند و و توضیح کنند هر گروپ جـواب سـوالات را ارایـه کند.	
20 دقیقه	2. مثال و جدول صفحۀ 6 را طور انفرادی به بینیـد و محاسـبه احصائیۀ توصیفی را بخوانید. 3. ترینر جدول نامبرده را از روی چارت طوری توضیح می کنـد که دربارۀ هر محاسـبه سـوالاتی مطـرح کـرده و بـه کمـک شاگردان به آن ها جواب می دهد. اگر کـدام مشـکل وجـود داشته باشد توضیحات بیشتر می دهد تا که مطمئن شود کـه	ترینر کوشش می کنـد کـه مسـایل مـبهم را توضـیح نماید.	

	تمام شاملین تعریف و محاسبه را درک کرده اند. طوری سوال مطرح نماید که فهمیده شود که همه موضوع را درک کرده اند. مثلاً: آیا در پوهنتون کابل، محصلان پوهنحی طب جهت ارایه معلومات، نمونهٔ تمام محصلان کشور شده میتوانند؟ چرا؟ اگر اوسط های دو مشاهده با هم برابر باشند، درینصورت آیا گفته میتوانیم که آن ها در یک جمعیت واقع اند؟ چرا؟ 4. در ختم ترینر تکرار می کند که جهت تدریس، بسیار مهم است تا شاگردان مفاهیم اولی احصائیه را درک نمایند و به این منظور باید مثال های زیادی خارج از کتاب ارایه دهد و مثال های در مورد مکتب، روش وغیره مورد استفاده قرار گیرد. در ختم جهت سایر سوالات شاملین، جواب تهیه نماید. ترینر سوالات غلط را اصلاحات نماید و خودش توضیحات بیشتر ارایه نماید. وظیفهٔ خانگی: 1. در ختم مواد ممد ارقام توصیفی مفقود شده از جدول را محاسبه کنید، گراف های مناسب میله ای برایش بسازید. 2. فصول احصائیه کتب صنوف 10-11 و 12 را بخوانید و مسایلی که برای شما مشکل است را بیرون نویس کنید که فردا روی آن کار شود.	شاملین به توضیحات ترینر گوش می دهند و یاد داشت می گیرند.	

تمرین کارخانگی احصائیه

نمرات ریاضی شاگردان صنف الف

شماره	نمرات	ملاحظات
1	70	
2	60	
3	65	
4	50	

نمرات ریاضی شاگردان صنف ب

شماره	نمرات	ملاحظات
1	70	
2	75	
3	65	
4	60	

5	95	
6	85	
7	75	
8	55	
9	60	
10	70	
11	85	
12	75	
13	70	
14	70	
15	70	
16	65	
17	75	
18	75	
19	65	
20	75	
21	65	
22	65	
23	70	
24	70	
25	60	

5	80	
6	85	
7	50	
8	55	
9	60	
10	70	
11	85	
12	90	
13	85	
14	80	
15	70	
16	95	
17	80	
18	80	
19	55	
20	80	
21	65	
22	85	
23	80	

احصائیه توصیفی هر کدام ازین دو صنف را محاسبه کنید.

مود، یا میانه: اوسط، فاصله، انحراف معیاری، توزیع و جدول فریکونسی و چارت های مناسب را تهیه کنید. تحلیل کنید و مشابهت های آن ها را تشخیص دهید.

آیا میتوانید بگوئید که توزیع فریکونسی نمرات این صنوف، نورمال است یا نه؟ چرا؟

مثال: از صد نفر معلم پرسیده شده که با جملات ذیل توافق دارند یا خیر؟

«درست است که برای افغانستان موتر های کهنه و ارزاق وارد کنیم؟» از ایشان خواسته شده که نظریات خود را درین باره طبق جدول ذیل از پنج بدیل یکی از انتخاب کنید. نتایج سروی در جدول ذیل نشان داده شده است.

فصیدی فریکونسی	تعداد	عبارت توافق	درجه
20		باالکل موافق	1
30		نسبتاً موافق	2
20		نا مطمئن	3
15		نسبتاً مخالف	4
15		باالکل مخالف	5

شما احصائیهٔ توصیفی مناسب را مطالعه کنید.

لکچر ششم

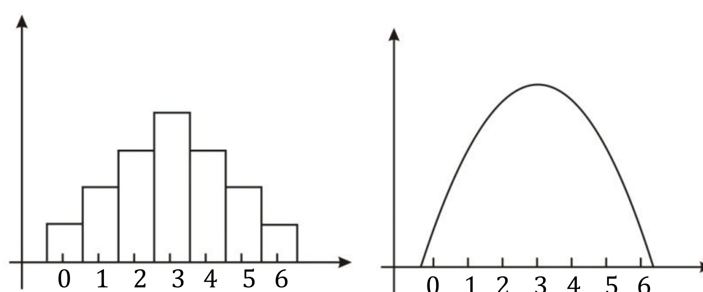
منحنی نارمل (Normal Curve)

علما منحنی نارمل را به حیث یک مودل قبول نموده اند. ازروی نتایج حادثات و مشاهدات قانون خطا ها و اشتباهات را انکشاف داده اند. قانون خطاها را محض به شکل مجموعه عمومیات که دراکثر مواردصدق می کرد، قبول نموده بود و این عمومیات عبارت بود از:

1. خطاهای خورد تر نظر به خطاهای بزرگتر زیاد واقع می شد.
2. بسیار خطاهای بزرگ به ندرت واقع می شد.
3. هر قدر خطاها بزرگ می باشد تعداد خطاها کمتر می شد.
4. خطاهای منفی از طرف چپ با خطاهای مثبت از طرف راست تقزیباً مساوی می بود.

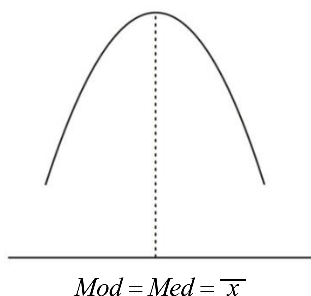
Abraham Demoiver (1747 -1667) معادله منحنی نارمل را استخراج کرد قانون خطا ها را در شکل ریاضی تعریف کرد این موضوع را در مثال ذیل واضح می سازیم.

از یک تعداد شاگردان شش سوال صحیح و غلط را به قسم امتحان ارائه کرد در حالیکه شاگردان در باره هیچ معلومات ندارد هم چنان کدام اشاره نیز در زمینه موجود نیست که شاگردان را به حل سوالات رهنمایی کند. به عبارت دیگر تنها حدس میزند که جواب صحیح را پیدانماید درینصورت شاگردان به حل جواب صحیح 50% چانس دارد قبول می نمایم که سوالات به صورت اتفاقی که توزیع شده است اوسط نمرات شاگردان ممکن سه جواب صحیح و سه جواب غلط باشد. تمام شاگردان این نمره راگرفته نمیتواند بعضی ها ممکن نمره بلندتر و بعضی ها نمره پائین تر را گیرد. بعضی شاگردان ممکن چار جواب صحیح و دو غلط، یا پنج جواب صحیح و یک غلط را انتخاب نماید و برعکس. که گراف مستطیلی آن شکل ذیل را خواهد داشت.

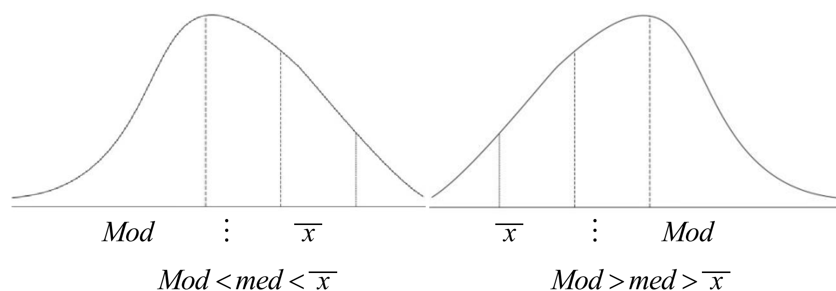


هر قدر مقدار دفعات (فرکونسی) و نمرات زیاد باشد به همان اندازه در گراف فوق مستطیل ها نیز زیاد شده و منحنی به شکل منحنی نارمل نزدیک می شود.

اگر به گراف های فوق دقت نمایم شکل نارمل را دارد. این منحنی متناظر است که تناظر نظر به اوسط حسابی می باشد در حالت توزیع نارمل ارقام اوسط حسابی میانه مود منطبق هم اند.



اگر منحنی نارمل متناظر نباشد درینصورت اشکال ذیل را خواهد داشت.



دیده می شود که در منحنی طرف راست دامنه منحنی به طرف راست خمیدگی دارد که درین حالت $Mode$ بزرگتر از میانه و میانه بزرگتر از اوسط حسابی است. و در منحنی طرف چپ دیده می شود که دامنه منحنی به طرف چپ خمیدگی دارد و درین حالت مود کوچکتر از میانه و میانه کوچکتر از اوسط حسابی است.

باید گفت که اگر اوسط و میانه مساوی باشد ارقامیکه به طرف راست و ارقامیکه به طرف چپ او سط یا میانه قرار دارد، باهم مساوی است مثلاً اگر ارقام $1,2,3,4,5,6,7,8$ را در نظر بگیریم دیده می شود که میانه و اوسط این ارقام مساوی می شود به:

$$med = \frac{4+5}{2} = 4.5$$

و اوسط آن $\overline{x} = \frac{1+2+3+4+5+6+7+8}{8} = \frac{36}{8} = 4.5$ می باشد و دیده می شود که ارقام طرف راست 4.5 چهار رقم و به طرف چپ آن نیز عین تعداد قرار دارد.

تابع منحنی نارمل

گراف منحنی نارمل یک تابع مغلق است که یک فامیل منحنی ها را می دهد و تعداد آن نهایت زیاد است که به قیمت های اوسط حسابی و انحراف معیاری معین می گردد. معادله منحنی نارمل عبارت است از

$$y=\frac{1}{S\cdot\sqrt{2\pi}}\cdot e^{-\frac{\left(x-\overline{x}\right)^2}{2S^2}}$$

درین تابع:

y. ارتفاع منحنی است که به قیمت معین x قیمت معین دارد.

x. یک عدد یا رقم است که مطابقت به قیمت معین y می نماید.

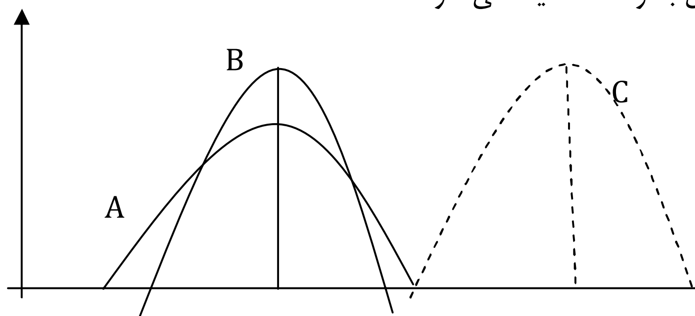
$\bar{x}$. اوسط حسابی ارقام داده شده x است.

S. انحراف معیاری ارقام داده شده x است.

π. عدد ثابت $3.1416\cdots$ می باشد.

e. عددثابت $2.7183\cdots$ می باشد.

در منحنی نارمل اوسط حسابی و انحراف معیاری رول اساسی را بازی می نماید و در تشکیل منحنی نارمل جای خاص را دارد که در اشکال ذیل به وضاحت دیده می شود.



درین شکل ار تفاع انحراف معیاری را نشان می دهد. منحنی های A و B دارای ار تفاعات (انحراف معیاری) مختلف بوده ولی اوسط یکسان را دارد. منحنی های B و C دارای ارتفاعات (انحراف های معیاری یکسان بوده ولی اوسط های حسابی مختلف دارد) اگر اوسط حسابی $\overline{x}=0$ و انحراف معیاری $S=1$ فرض شود تابع منحنی نارمل شکل ساده را به خود می گیرد و آن عبارت است از:

$$y=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\cdot e^{-\frac{x^2}{2}}$$

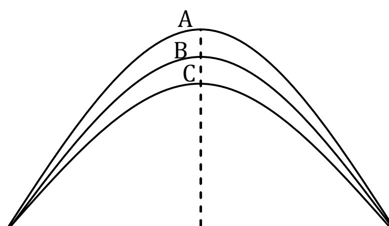
این شکل منحنی نارمل را بنام شکل معیاری منحنی نارمل یاد می کنند.

مشخصات منحنی نارمل:

1. گراف منحنی نارمل یک تابع ریاضی بوده و برای حادثات که بصورت اتفاقی واقع می شود، یک مودل است.
2. تعداد منحنی های نارمل بی نهایت زیاد بوده که به قیمت های معین اوسط حسابی و انحراف معیاری مشخص می گردد.
3. منحنی نارمل در شکل متناظر بوده ار تفاع اعظمی آن در قسمت و سط قرار دارد.
4. منحنی نارمل یک منحنی متمادی است که به قیمت های معین x ار تفاع (y) قیمت معین را بخود می گیرد.
5. برای تمام قیمت های x قیمت y همیشه مثبت است در حالیکه x مثبت و منفی شده میتواند.
6. منحنی نارمل محور x را قطع نمی کند بلکه محور x مجانب آن است.

تبصره: در منحنی نارمل هر قدر انحراف معیاری زیاد شود به همان اندازه قله منحنی به طرف بالا کش می شود.

در منحنی ذیل اوسط حسابی و انحراف معیاری یکسان است مگر از نظر جمعیت فرق دارد. به این ترتیب در منحنی A , $n=300$ ، در منحنی B , $n=200$ و در منحنی C , $n=100$ است که قله A نظر به B و C بلندتر است.



$Karl\ Pearson$ ریاضیدان مشهور در حالت عدم تناظر منحنی نارمل فورمول ذیل را پیشنهاد کرد

$$S_K = \frac{\bar{x} - M_0}{S}$$

طوریکه $\bar{x}$ اوسط ارقام، M_0 مود، S انحراف معیاری و S_K در جه عدم تناظر پراگندگی ارقام است. به اساس فورمول فوق هر گاه دامنه منحنی نارمل به طرف راست باشد درینصورت $S_K > 0$ $\left(\bar{x} > M_0\right)$ و اگر دامنه منحنی نارمل به طرف چپ باشد درینصورت $S_K < 0$ $\left(\bar{x} < M_0\right)$ است. مگر در حالت تناظر $S_K = 0$ است.

چون در ارقام تصنیف شده M_0 در محاسبات مشکلاتی را بمیان می اورد درین حالت رابطه ای دربین مود، میانه و اوسط وجود دارد که میتوان به عوض مود میانه را به کار برد.

رابطه مذکور عبارت است از.

$$M_0 = 3Mod - 2\bar{x}$$

اگر در فورمول $Karl\ Person$ به عوض M_0 ما Med را به کار ببریم چنین خواهد شد.

$$S=\frac{\bar{x}-M_0}{S}=$$
$$=\frac{\bar{x}-\left(3Med-2\bar{x}\right)}{S}=$$
$$=\frac{\bar{x}-3Med+2\bar{x}}{S}=$$
$$=\frac{3\bar{x}-3Med}{S}$$
$$=\frac{3\left(\bar{x}-Med\right)}{S}$$

مثال i: در توزیع ارقام اگر $\bar{x}=25$, $Med=26$ و انحراف معیاری $S=2$ باشد پس

$$s_K=\frac{3(23-26)}{2}=-1.5$$

چون $s_K=-1.5<0$ است پس دامنه منحنی به طرف چپ خمیده گی دارد.

مثال ii . در یک مکتب 150 نفر شاگرد درس می خواند وزن های شان در جدول ذیل و داده شده است.

معلومات های ذیل را بدست آرید

1. اوسط عمر های شاگردان را دریافت نمایند.
2. میانه و مود عمرهای شاگردان رابدست آرید.
3. انحراف معیاری را نظر به $\bar{x}$ و Med معلوم نمایند.
4. انحراف معیاری، انحراف متوسط و وریانس را دریافت نمایید.
5. ایا توزیع عمرها نارمل است؟
6. اگر توزیع عمرها نارمل نباشد درجه عدم تناظر را بدست آرید.

	ی	x		د	$f \cdot x$	x^2	$f \cdot x^2$
68 – 70	12	69	67.5	70.5	828	4761	57132
71 – 73	33	72	70.5	73.5	2376	5184	171072
74 – 76	80	75	73.5	76.5	6000	5625	450000
77 – 79	12	78	76.5	79.5	936	6084	73008
80 – 82	6	81	79.5	82.5	4860	6561	39366
83 – 85	3	84	82.5	85.5	552	7056	21168
86 – 88	2	87	85.5	88.5	174	7569	15138
89 – 91	2	90	88.5	91.5	180	8100	16200
	$\sum=150$	$\sum=600$			$\sum=11232$		$\sum=843084$

جواب i: اوسط حسابی

$$\bar{x} = 74.88$$

2). میانه ومود

$$Med = L_1 + \left(\frac{n}{2} - f\right) \cdot \frac{c}{f_m} =$$

$$= 73.5 + \left(\frac{2150}{2} - 45\right)\frac{3}{80}$$

$$= 74.625$$

$$M_0 = L_1 + \left(\frac{\Delta_1}{\Delta_1 + \Delta_2}\right) \cdot c$$

$$= 73.5 + \left(\frac{47}{47 + 68}\right) \cdot 3 =$$

$$74.73$$

3). انحراف متوسط نظر به $\bar{x}$

$$A \cdot D = \frac{\sum f\left|x - \bar{x}\right|}{n} = 2,21$$

4). انحراف متوسط نظر به $Med = 74.625$

$$A \cdot D = 1.91$$

5). انحراف معیاری

$$S=\sqrt{\frac{\sum f\ x^2}{n}-\left(\frac{\sum f\cdot x}{n}\right)^2}$$
$$=0.041>0$$

تمرین. جدول ذیل داده شده است.

صنوف	وسط صنفی	f
$0-10$	5	1
$10-20$	15	3
$20-30$	25	4
$30-40$	35	2

1. اوسط حسابی را محاسبه نمائید.
2. میانه و مود را محاسبه نمائید.
3. انحراف متوسط را محاسبه نمائید.
4. انحراف معیاری را بدست arید.
5. درجه عدم تناظر را نظر به مود، میانه و او سط حسابی بدست arید.

لکچر هفتم

میلان $(Redression)$ و همبستگی $(correlation)$

در دروس قبلی جمع اوری ار قام و معلومات ها را به طرق و روش های مناسب مطالعه نمودیم و دیدیم که چطور میتوان این ارقام را تصنیف، تحلیل و تجزیه نمایم. درین جا متحولین میتواند نمرات امتحان یک تعداد شاگردان در دو امتحان، طول اقامت شاگردان و وزن افراد باشد.

اصطلاح همبستگی عبارت از درجه ارتباط دو ویا چند متحول است و متحولین مربوط عبارت از همان متحولین است که با یکدیگر یکجا تحول می نماید. اگر یک متحول تزاید نماید متحول دیگر نیز تزاید می نماید و یا برعکس.

فرض می نمایم که یک شاگرد در شروع سال از اوسط بیشتر نمره گرفته و در اخیر سال نیز از اوسط بیشتر نمره گرفته است و اگر در شروع سال از اوسط کمتر گرفته باشد پس می گویند که این نمرات باهم ارتباط مثبت دارد. گاهی این حالت نیز واقع می گردد که نمرات بلند یک متحول با نمرات کم متحول دیگر ارتباط داده شده باشد درینصورت گویند که این در متحول باهم ارتباط منفی دارند.

ضریب ارتباط بین رابطه متحولین شاخصی است که اقسام مختلف دارد مگر انها بعضی صفات مشترک دارند. که دو متحول بین خود ارتباط مثبت دارد پس ضریب شان مثبت یک $(+1)$ است، و اگر رابطه منفی داشته باشد ضریب ارتباط شان منفی یک (-1) می باشد و اگر بین خود هیچ ارتباط نداشته باشد ضریب ارتباط شان صفر است. به این ترتیب اگر ضریب ارتباط به r نشان دهیم داریم.

$$-1 \le r \le 1$$

بطور خلاصه می گویم اگر $r=+1$ باشد ارتباط بین دو متحول کاملاً مثبت و اگر $r=-1$ باشد ارتباط بین شان کاملاً منفی و اگر $r=0$ باشد درین دو متحول هیچ ارتباط وجود ندارد.

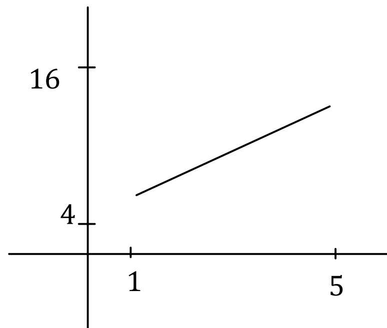
طور مثال نتایج دو امتحان یک تعداد شاگردان را در نظر می گریم نمرات یک امتحان را به x و نمرات امتحان دیگر را به y نشان می دهیم.

x و y را روی مختصات افقی و عمودی سیستم مختصات قایم نشان داده می توانیم

طوریکه جفت هر امتحان در سیستم یک نقطه را می دهد.

جدول ذیل را در نظر می کریم

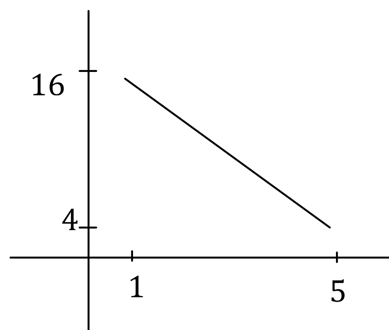
x	1	2	3	4	5
y	4	8	10	14	16



گراف فوق نشان می دهد که نقاط مذکور دروی یک خط مستقیم قرار دارد و رابطه بین متحولین $r=+1$ است.

و اگر جدول ذیل را در نظر بگریم.

x	1	2	3	4	5
y	16	14	10	8	4

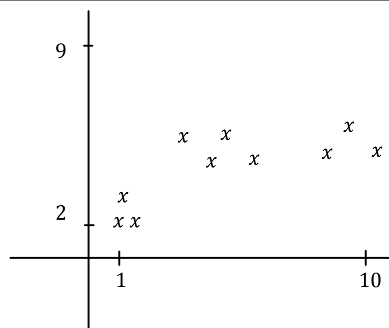


در این جا رابطه بین x و y را بطه منفی بوده $r=-1$ است.

در حالات دیگر که نقاط کاملاً روی خط مستقیم قرار نداشته باشد میتوان شد که رابطه مثبت، میتوان که رابطه منفی و میتواند را بطه به شکل خط منحنی بوده و یا هیچ رابطه موجود نباشد.

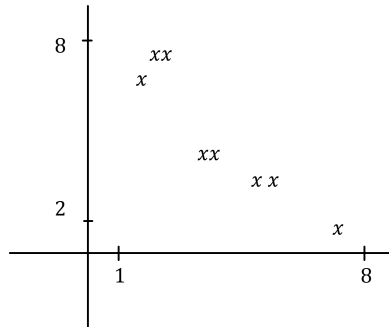
باز هم جدول ذیل را در نظر می گریم.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
	2	3	2	5	7	5	6	8	7	9



این رابطه مثبت است

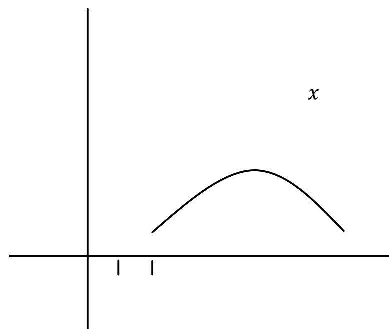
	2	3	3	4	5	5	5	7	8	8
	8	7	8	5	4	5	3	5	3	2



این رابطه منفی است

حالاً جدول ذیل را درنظر می گریم

	10	9	8	7	6	4	3	2	1
	1	2	3	4	4.5	4	3	1	1



گراف این جدول منحنی است.

هرقدر نقاط به خط مستقیم نزدیک شود درجه ارتباط بلند می شود درجه ارتباط توسط فورمول ذیل محاسبه می گردد.

$$r = \frac{\sum xy}{\sum x^2 \sum r^2}$$

x	y	$x-\overline{x}=x$	$y-\overline{y}=y$	x^2	y^2	xy
5	9	0	3	0	9	0
10	8	5	2	25	4	10
2	6	−3	0	9	0	0
3	7	−2	1	4	1	−2
1	3	−4	−3	16	9	12
2	3	−3	−3	9	9	9
4	6	−1	0	1	0	0
8	4	3	−2	9	4	−6
6	6	1	0	1	0	0
9	8	4	2	16	4	8
$\sum x=0$ $\overline{x}=5$	$\sum y=60$ $\overline{y}=6$	$\sum x=0$	$\sum y=0$	$\sum x^2=90$	$\sum y^2=40$	$\sum xy=31$

$$r=\frac{\sum xy}{\sum x^2 \sum y^2}=\frac{31}{\sqrt{90}\cdot\sqrt{40}}=\frac{3}{\sqrt{3600}}=\frac{31}{60}=0.52$$

درین جا یک موضوع دیگری را نیز معرفی می داریم که بنام ضریب تغیرات یاد می شود، در حقیقیت ضریب تغیرات عبارت از ضریب پراگندگی است یکی از محل تطبیق آن مقایسه نمودن دو جمعیت غیر متجانس است. ضریب تغیرات عبارت از حاصل تقسیم انحراف معیاری بر اوسط ارقام است.

$$\text{تعیراتضریب}=\frac{\text{نحراف معیاریا}}{\text{اوسط}}=\frac{S}{\overline{x}} \qquad \text{(تحول)}$$

ضریب تغیرات (تحول) را اکثراً به شکل فیصدی می اورند و برای این هدف $\frac{S}{\overline{x}}$ را ضرب 100 می نماید.

مثال. ضریب تغیرات ارقام 5 3 1 رابدست ارید.

$$\overline{x}=\frac{\sum x_1}{n}=\frac{1+3+5}{3}=\frac{9}{3}=3$$

$$S^2=\frac{\sum\left(x-\overline{x}\right)^2}{n}=\frac{(1-3)^2+(3-3)^2+(5-3)^2}{3}=\frac{4+0+4}{3}=\frac{8}{3}=2.67$$

$$S=\sqrt{2.67}=1.63$$

اگر ضریب تغیرات را به CV نشان دهیم خواهیم داشت

$$CV=\frac{S}{\overline{x}}=\frac{1.63}{3}=0.524$$

ii). یک مولد گروپ های تصویری تلویزیون دو نوع گروپ A و B را تولید می نماید طوریکه دوره استهلاک متوسط گروپ A مساوی به 1495 ساعت و از B مساوی به 1875 ساعت است اگر انحراف معیاری انها به ترتیب 280 و 310 ساعت باشد درینصورت نشان دهید که ضریب تغیرات کدام گروپ بیشتراست.

حل: اگر ضریب تغیرات گروپ A را به $C{\cdot}D{\cdot}S_A$ و از B را به $C{\cdot}D{\cdot}S_B$ نشان دهیم خوهیم داشت

$$C\cdot D\cdot S_A=\frac{S_A}{\bar{x}_A}=\frac{280}{1495}\cdot 100=0.187\cdot 100=18.7\%$$

$$C\cdot D\cdot S_B=\frac{S_B}{\bar{x}_B}=\frac{310}{1875}\cdot 100=0.165\cdot 100=16.5\%$$

چون ضریب تغیرات گروپ A نظر به گروپ B بشتر است پس گروپ A دارای پراگندگی بیشتر است.

مفهوم دیگری که باید تحت مطالعه قرار گیرد موضوع همبستگی است و میلان نیز یک مفهوم دومی است که باید تحت مطالعه قرار کیرد این دو موضوع باهمدیگر انقدر ارتباط نزدیک دارد که اکثراً یکی به جای دیگری استعمال می گردد.

اصطلاح همبستگی به درجه ارتباط دو متحول اطلاق می گردد. و قتیکه دو متحول باهم ارتباط داشته باشد پس یک متحول را میتوان از جنس متحول دیگری پیش بین کرد مگر کلمه میلان به صفات و مشخصات متحولین یک پدیده اطلاق می گردد وقتیکه ارتباط بین دو متحول مکمل نه باشد.

در سال 1883 یک عالم بنام $FrancisGalton$ راجع به میلان یک مقاله را نشر نمودند و از روی آن ثابت نمودند که بسیاری مشخصات انسانها ارثی است و از یک نسل به نسل دیگر انتقال می نماید. مثلاً اگر قامت پدر بلند باشد قامت پسران آن نیز بلند خواهد بود مگر عالم دیگر با این موضوع دلچسپی داشت که مشخصات فزیکی اطفال از مشخصات فزیکی اسلاف پیشگوئی نماید و دید که همان والدین که قامت شان بلند بود قامت پسران شان نیز بلند بود مگر به اندازه والدین شان نبود وهم چنان قامت والدین که کوتاه بود قامت پسران شان نیز کوتاه بوده مگر به اندازه قامت والدین شان نه بود این پدیده را به طرف اوسط بنام میلان یاد کردند طور مثال اگر نمرات دوره تحصیل یک محصل با نمرات امتحان شمول شان ارتباط داشته باشد پس محقق می تواند نمرات دوره پوهنتون انرا از روی نمرات امتحان شمول پیش بینی کرد. اگر x متحول پیش گوی کننده (امتحان شمول) و y متحول پیشگویی شونده (نمرات دوره پوهنخی) باشد درینصورت برای شاگرد مذکور نمره خوبتر از همه پیشگوی ها اوسط حسابی y است که از روی آن به مقایسه هر نمره کمترین خطا پیشگویی شده میتواند اگر بین x و y کدام رابطه ای موجود نباشد محقق نخواهد توانست که متحول y را بصورت کامل پیشگویی نماید باید گفت که اگر نقاط به شکل یک خط مستقیم هر قدر باهم نزدیکتر باشد خطای متحول y نظر به x کمتر است و برعکس بیشتر است بنابرین روش همبستگی نقاط را باید اندازه نموده و برای این هدف برای دریافت ضریب همبستگی فورمول ذیل را به کار می برند.

$$r=\frac{\frac{\sum x\cdot\sum y-\bar{x}\,\bar{y}}{n}}{s_x\cdot s_y}$$

طوریکه s_x و s_y به ترتیب انحراف معیاری $\bar{x}$ ها و $\bar{y}$ است و به این ترتیب داریم

$$r=\frac{\frac{\sum xy}{n}-\bar{x}\,\bar{y}}{S_x\cdot S_y}$$

مثال: ارقام ذیل وزن اولیه و بعد از تطبیق رژیم غذایی وزن بعدی یک حیوان را نشان می دهد.

شماره حیوان	اولیه وزن x	وزن بعدی y	$x\cdot y$
1	1	8	8
2	2	3	6
3	1	7	7
4	3	5	15
5	2	4	8
	$\sum x=9$	$\sum y=27$	$\sum x\cdot y=44$

ضریب همبستگی وزن اولیه و وزن بعد از تطبیق رژیم غذایی محاسبه نمائید.

$$\bar{x}=\frac{9}{5}=1.8 \qquad \bar{y}=\frac{27}{5}=5.4$$

$$S_x^2=\frac{(1-1.8)^2+(2-1.8)^2+(1-1.8)^2+(3-1.8)^2+(2-1.8)^2}{5}=$$
$$=\frac{0.6+0.04+0.64+1.44-0.04}{5}=\frac{2.8}{5}=0.56$$
$$S_x=\sqrt{0.56}=0.75$$

$$S_y^2=\frac{(8-5.6)^2+(3-5.6)^2+(7-5.6)^2+(5-5.6)^2+(4-5.6)^2}{5}=$$
$$=\frac{5.76+6.76+1.96+0.36+2.56}{5}=\frac{17.4}{5}=3.48$$
$$S_y=\sqrt{3.48}=1.87$$

$$\frac{\sum xy}{5}=\frac{44}{5}=8.8$$

بنابرین

$$r=\frac{\frac{\sum xy}{n}-\bar{x}\,\bar{y}}{S_xS_y}=\frac{\frac{44}{5}-(1.8)(5.4)}{(0.75)(1.87)}=\frac{8.8-9.72}{1.4}=\frac{-0.92}{1.4}=-0.6$$

مثال.

x	1	2	3	4
y	3	5	7	9

$$\bar{x}=\frac{10}{4}=2.5 \qquad \bar{y}=\frac{24}{4}=6$$

$$S_x^2=\frac{(1-2.5)^2+(2-2.5)^2+(3-2.5)^2+(4-2.5)^2}{4}=\frac{(2.5)+(0.25)+(0.25)+(2.25)}{4}$$

$$=\frac{5}{4}=1.25=>$$

$$S_y^2=\frac{(3-6)^2+(5-6)^2+(7-6)^2+(9-6)^2}{4}=\frac{9+1+1+9}{4}=\frac{20}{4}=5$$

$$\sum xy=(1\cdot 3)+(2\cdot 5)+(3\cdot 7)+(4\cdot 9)=3+10+21+36=70$$

$$r=\frac{\frac{\sum xy}{n}-\bar{x}\,\bar{y}}{S_x\cdot S_y}=\frac{\frac{70}{4}-(2.5)(6)}{\sqrt{1.25}\cdot\sqrt{5}}=\frac{15\cdot 5-15}{\sqrt{6.26}}=\frac{2.5}{2.5}=1$$

باید متذکر شد در صورتیکه y کمترین خطا را داشته باشد (مقادیر y و x روی یک خط مستقیم قرار داشته باشد) ضریب همبستگی یا $1+$ و یا $1-$ می باشد درغیر آن $-1\le r\le 1$ می باشد.

لکچر هشتم

مترکس $Matrix$

فرض می نمایم که $\mathbb{R}$ ست تمام اعداد حقیقی باشد هرگاه تعدادی از اعداد حقیقی $\mathbb{R}$ را دریک جدول مستطیلی بنویسیم این جدول حاصل شده مستطیلی را بنام مترکس یاد می نمایند. اعداد یکه در داخل آن نوشته شده بنام عناصر مترکس یاد می شوند. میتوان مترکس اشیا و حروف الفبا را نیز تشکیل داد.

مترکس را عموماً توسط حروف کلان الفبای انگلیسی $A,B,C\cdots$ و عناصر انرا توسط حروف کوچک الفبا انگلیسی نشان می دهند.

مثال:

$$A=\begin{pmatrix}2&3&1\\4&2&3\\7&5&4\end{pmatrix}\quad,\quad B=\begin{pmatrix}6,4,-1,2\end{pmatrix}\quad,\quad C=\begin{pmatrix}6\\4\\3\end{pmatrix}$$

هرکدام آن یک مترکس را نشان دهنده در مترکس A $(2,3,1),(4,2,3),(7,5,4)$ سطر های مترکس و $\begin{pmatrix}2\\4\\7\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}3\\2\\5\end{pmatrix}$ و $\begin{pmatrix}1\\3\\4\end{pmatrix}$ را ستون های مترکس گویند یعنی مترکس A از سه سطر و سه ستون تشکیل شده است.

مترکس B تنها از یک سطر و مترکس C تنها از یک ستون متشکل است. در مترکس A که از سه سطر و از سه ستون تشکیل است تعداد سه سطر وسه ستون مرتبه مترکس A را نشان داده و انرا به شکل 3×3 می نویسند. مترکس B دارای یک سطر و 3 ستون بوده مرتبه آن 1×3 بوده و مترکس C دارای سه سطر و یک ستون بوده مرتبه آن 3×1 است.

به این ترتیب شکل عمومی یک مترکس عبارت است از:

$$A=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1m}\\a_{21}&a_{22}&\cdots&a_{2m}\\\vdots&&&\\a_{n1}&a_{n2}&\cdots&a_{nm}\end{pmatrix}$$

در حقیقت این مترکس دارای n سطر و m ستون بوده که مرتبه آن $n\times m$ است و عنصر این مترکس به شکل a_{ij} بوده طوریکه i نمایندگی از سطر و j نمایندگی از ستون می کند البته $i=1,2,\cdots,n$ و $j=1,2,\cdots,m$ می باشد بصورت عموم $n\neq m$ است. اگر $n=m$ باشد درینصورت مترکس مربعی گویند که شکل ذیل را دارا خواهد بود.

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

یعنی مرتبه آن $n\times n$ بوده و گویند که مترکس A از مرتبه n است. در مترکس هذا $\left(a_{11}\ ,\ a_{22}\ ,\ \cdots\ ,\ a_{nn}\right)$ قطر اصلی مترکس و $\left(a_{1,n}\ ,\ a_{2,n-1}\ ,\ \cdots\ ,\ a_{n,1}\right)$ قطر فرعی مترکس نامیده می شود.

اگر دریک مترکس برای i و j $a_{ij}=0$ باشد این مترکس را مترکس صفری گویند و انرا به شکل

$$A=\begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

نشان می دهند.

اگر دریک مترکس به استثنای عناصر قطر متباقی تمام عناصر صفر، باشد این مترکس را بنام مترکس قطری یاد می کنند.

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & & & \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nm} \end{pmatrix}$$

و اگر تمام عناصر قطر مساوی باشد مثلاً $a_{11}=a_{22}=\cdots=a_{nn}=k$. درین صورت این مترکس را مترکس سکالری گویند.

و اگر $k=1$ باشد این مترکس را مترکس واحد گویند.

$$A=\begin{pmatrix} k & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & k & \cdots & 0 \\ \vdots & & & \\ 0 & 0 & \cdots & k \end{pmatrix}$$

مترکس سکالری

واحد مترکس

$$I=\begin{pmatrix}1 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & 1 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & & \\ 0 & 0 & \cdots & 1\end{pmatrix}$$

مترکس مثلثی:

هرگاه دریک مترکس $i=1,n$ $j=1.m$ $\left(a_{ij}\right)$ برای تمام $a_{ij=0}$ $i>j$ باشد این مترکس را مترکس مثلثی پاینی و اگر برای $a_{ij}=0$ $i<j$ باشد درینصورت این مترکس را مترکس مثلثی بالائی گویند مثلاً

مترکس مثلثی پاینی

$$A_1=\begin{pmatrix}2 & 3 & 5\\ 0 & 4 & 6\\ 0 & 0 & 2\end{pmatrix}$$

مترکس بالائی اند

$$A_2=\begin{pmatrix}3 & 0 & 0\\ 2 & 5 & 0\\ 6 & 3 & 1\end{pmatrix}$$

عملیه های الجبری در مترکس ها:

1. هرگاه دو مترکس A و B را داشته باشیم درینصورت حاصل جمع آن

$$A+B=\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m}\\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m}\\ \vdots & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nm}\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1m}\\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2m}\\ \vdots & & & \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nm}\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & \cdots & a_{1m}+b_{1m}\\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & \cdots & a_{2m}+b_{2m}\\ \vdots & & & \\ a_{n1}+b_{n1} & a_{n2}+b_{n2} & \cdots & a_{nm}+b_{nm}\end{pmatrix}$$

بوده $A-B$ نیز مانند جمع عنصر تفریق می شود.

2. اگر بخواهیم یک سکالر را دریک مترکس ضرب نمایم سکالر مذکور درهر عنصر مترکس ضرب می شود به این ترتیب

$$\lambda\cdot A=\lambda\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12}\cdots & a_{1m}\\ a_{21} & a_{22}\cdots & a_{2m}\\ \vdots & & \\ a_{n1} & a_{n2}\cdots & a_{nm}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \lambda a_{11} & \lambda a_{12}\cdots & \lambda a_{1m}\\ \lambda a_{21} & \lambda a_{22}\cdots & \lambda a_{2m}\\ \vdots & & \\ \lambda a_{n1} & \lambda a_{n2}\cdots & \lambda a_{nm}\end{pmatrix}$$

3. ضرب دو مترکس:

فرض می نمایم که A و B دو مترکس باشد A و B وقتی ضرب شده می تواند که سطر های مترکس A با ستون های مترکس B مساوی باشد ویا برعکس ستون های مترکس A با سطر های مترکس B مساوی باشد.

مثال1. هرگاه $A=\begin{pmatrix}3 & 4 & 2\end{pmatrix}$ و $B=\begin{pmatrix}2\\3\\4\end{pmatrix}$ باشند درینصورت

$$A\times B=\underset{1\times3}{\begin{pmatrix}3 & 4 & 2\end{pmatrix}}\underset{3\times1}{\begin{pmatrix}2\\3\\4\end{pmatrix}}=\begin{pmatrix}3\cdot2+4\cdot3+2\cdot4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6+12+8\end{pmatrix}=\underset{1\times1}{(26)}$$

$$B\times A=\underset{3\times1}{\begin{pmatrix}2\\3\\4\end{pmatrix}}\underset{1\times3}{\begin{pmatrix}3 & 4 & 2\end{pmatrix}}=\begin{pmatrix}3\cdot2 & 2\cdot4 & 2\cdot2\\ 3\cdot3 & 3\cdot4 & 3\cdot2\\ 4\cdot3 & 4\cdot4 & 4\cdot2\end{pmatrix}=\underset{3\times3}{\begin{pmatrix}6 & 8 & 4\\ 9 & 12 & 6\\ 12 & 16 & 8\end{pmatrix}}$$

مثال2.

$$\begin{pmatrix}2 & 3 & 4\\ 1 & -2 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3 & 2\\ 4 & 8\\ 5 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\cdot3+3\cdot4+4\cdot5 & 2\cdot2+3\cdot8+41\\ 1\cdot3+(-2)\cdot4+3\cdot5 & 1\cdot2+(-2)\cdot8+3\cdot1\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}6+12+20 & 4+24+4\\ 3-8+15 & 2-16+3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}38 & 32\\ 10 & -11\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}3 & 2\\ 4 & 8\\ 5 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & 3 & 4\\ 1 & -2 & 3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\cdot2+2\cdot+ & 3\cdot3+2\cdot(-2) & 3\cdot4+2\cdot3\\ 4\cdot2+8\cdot1 & 4\cdot3+8\cdot(-2) & 4\cdot4+8\cdot3\\ 5\cdot2+1\cdot1 & 5\cdot3+1\cdot(-2) & 5\cdot4+1\cdot3\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}6+2 & 9-4 & 12+6\\ 8+8 & 12-16 & 16+24\\ 10+1 & 15-2 & 20+3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}8 & 5 & 18\\ 16 & -4 & 40\\ 11 & 13 & 23\end{pmatrix}$$

خواص مترکس ها:

1. جمع مترکس ها خاصیت تبادلوی را صدق می نماید.
2. ضرب مترکس ها بصورت عموم خاصیت تبادلوی را صدق نمی کنند.
3. جمع و ضرب مترکس ها خاصیت اتحادی را صدق می نماید.
4. جمع و ضرب مترکس ها خاصیت توزیعی را صدق می نماید.
5. جمع مترکس با مترکس واحد مساوی به مترکس است که هر عنصر قطر به اندازه یک واحد زیاد می شود در مثال های ذیل خواص فوق را وضاحت می دهیم.
6. ضرب مترکس با مترکس واحد بازهم خود مترکس را می دهد.

مثالها:

$$A=\begin{pmatrix}3 & 4\\ 2 & -5\\ -6 & 4\end{pmatrix} \quad , \quad B\begin{pmatrix}1 & 3\\ 2 & 7\\ 4 & 15\end{pmatrix}$$

$$A+B=\begin{pmatrix}3 & 4\\ 2 & -5\\ -6 & 4\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1 & 3\\ 2 & 7\\ 4 & 15\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1+3 & 4+3\\ 2+2 & -5+7\\ -6+4 & 4+15\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4 & 7\\ 4 & 2\\ -2 & 19\end{pmatrix}$$

$$A-B=\begin{pmatrix}3 & 4\\ 2 & -5\\ -6 & 4\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1 & 3\\ 2 & 7\\ 4 & 15\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3-1 & 4-3\\ 2-2 & -5-7\\ -6-4 & 4-15\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & 1\\ 0 & -12\\ -10 & -11\end{pmatrix}$$

$$B-A=\begin{pmatrix}1 & 3\\ 2 & 7\\ 4 & 15\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}3 & 4\\ 2 & -5\\ -6 & 4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1-3 & 3-4\\ 2-2 & 7+5\\ 4+6 & 15-4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2 & -1\\ 0 & 12\\ 10 & 11\end{pmatrix}$$

دیده می شود که $A-B\neq B-A$ است.

. مترکس های فوق را در نظر گرفته خاصیت تبادلوی مربوط به عملیه جمع را تحقیق نمائید.

$$B+A=\begin{pmatrix}1 & 3\\ 2 & 7\\ 4 & 15\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}3 & 4\\ 2 & -5\\ -6 & 4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1+3 & 3+4\\ 2+2 & 7-5\\ 4-6 & 15+4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4 & 7\\ 4 & 2\\ -2 & 19\end{pmatrix}$$

مترکس $C=\begin{pmatrix}1 & 5\\ 6 & 2\\ 3 & 4\end{pmatrix}$ را درنظر گرفته با مترکس های داده شده A و B خاصیت اتحادی را بالای آن تطبیق نمائید.

$$A+\left(B+C\right)=\begin{pmatrix}3 & 4\\ 2 & -5\\ -6 & 4\end{pmatrix}+\left[\begin{pmatrix}1 & 3\\ 2 & 7\\ 4 & 15\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1 & 5\\ 6 & 2\\ 3 & 4\end{pmatrix}\right]=$$

$$=\begin{pmatrix}3 & 4\\ 2 & -5\\ -6 & 4\end{pmatrix}+\left[\begin{pmatrix}1+1 & 3+5\\ 2+6 & 7+2\\ 4+3 & 15+4\end{pmatrix}\right]=\begin{pmatrix}3 & 4\\ 2 & -5\\ -6 & 4\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}2 & 8\\ 8 & 9\\ 7 & 19\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}3+2 & 4+8\\ 2+8 & -5+9\\ -6+7 & 4+19\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5 & 12\\ 10 & 4\\ 1 & 23\end{pmatrix}$$

$$\left(A+B\right)+C=\left[\begin{pmatrix}3 & 4\\ 2 & -5\\ -6 & 4\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1 & 3\\ 2 & 7\\ 4 & 15\end{pmatrix}\right]+\begin{pmatrix}1 & 5\\ 6 & 2\\ 3 & 4\end{pmatrix}=$$

$$=\left[\begin{pmatrix}3+1 & 4+3\\ 2+2 & -5+7\\ -6+4 & 4+15\end{pmatrix}\right]+\begin{pmatrix}1 & 5\\ 6 & 2\\ 3 & 4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4 & 7\\ 4 & 2\\ -2 & 19\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1 & 5\\ 6 & 2\\ 3 & 4\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}4+1 & 7+5\\ 4+6 & 2+2\\ -2+3 & 19+4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5 & 12\\ 10 & 4\\ 1 & 23\end{pmatrix}$$

دیده می شود که خاصیت اتحادی صدق می نماید.

. اگر $A=\begin{pmatrix}2 & 4\\ 5 & 6\end{pmatrix}$ و $B=\begin{pmatrix}3 & 1\\ 4 & 7\end{pmatrix}$ و $C=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 5 & 6\end{pmatrix}$ باشد درینصورت

$$C\cdot(A+B)=\begin{pmatrix}1&2\\5&6\end{pmatrix}\times\left[\begin{pmatrix}2&4\\5&6\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}3&1\\4&7\end{pmatrix}\right]=\begin{pmatrix}1&2\\5&6\end{pmatrix}\times\begin{bmatrix}2+3&4+1\\5+4&6+7\end{bmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}1&2\\5&6\end{pmatrix}\begin{pmatrix}5&5\\9&13\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\cdot5+2\cdot9&1\cdot5+2\cdot13\\5\cdot5+6\cdot9&5\cdot5+6\cdot13\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5+18&5+26\\25+54&25+78\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}23&31\\79&103\end{pmatrix}$$

$$C\cdot A+C\cdot B=\begin{pmatrix}1&2\\5&6\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&4\\5&6\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1&2\\5&6\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3&1\\4&7\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}1\cdot2+2\cdot5&1\cdot4+2\cdot6\\5\cdot2+6\cdot5&5\cdot4+6\cdot6\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1\cdot3+2\cdot4&1\cdot1+2\cdot7\\5\cdot3+6\cdot4&5\cdot1+6\cdot7\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}2+10&4+12\\10+30&20+36\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}3+8&1+14\\15+24&5+42\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}12&16\\40&56\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}11&15\\39&47\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}12+11&16+15\\40+39&56+47\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}23&31\\79&103\end{pmatrix}$$

. جمع مترکس با واحد مترکس

$$A+I=\begin{pmatrix}5&6&2\\3&1&4\\2&7&9\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5+1&6+0&2+0\\3+0&1+1&4+0\\2+0&7+0&9+1\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}6&6&2\\3&2&4\\2&7&10\end{pmatrix}$$

حالاً خواص فوق را در ضرب مترکس بایک مترکس دیگر در نظر می گیریم

. در مترکس های مثال دوم دیده شده که $A\cdot B\neq B\cdot A$ است بنابرین ضرب مترکس ها بصورت عموم تبادلوی نیست.

. ضرب مترکس ها خاصیت اتحادی را صدق می کند زیرا اگر مثال جز 5 را درنظر بگیریم خواهیم داشت

$$A=\begin{pmatrix}2&4\\5&6\end{pmatrix}\ ,\quad B=\begin{pmatrix}3&1\\3&7\end{pmatrix}\ ,\quad C=\begin{pmatrix}1&2\\5&6\end{pmatrix}$$

$$A\cdot(B\cdot C)=\begin{pmatrix}2&4\\5&6\end{pmatrix}\left[\begin{pmatrix}3&1\\4&7\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2\\5&6\end{pmatrix}\right]=\begin{pmatrix}2&4\\5&6\end{pmatrix}\left[\begin{pmatrix}3\cdot1+1\cdot5&3\cdot2+1\cdot6\\4\cdot1+7\cdot5&4\cdot2+6\cdot7\end{pmatrix}\right]=$$

$$=\begin{pmatrix}2&4\\5&6\end{pmatrix}\begin{bmatrix}3+5&6+6\\4+35&8+42\end{bmatrix}=\begin{pmatrix}2&4\\5&6\end{pmatrix}\begin{pmatrix}8&12\\39&50\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}2\cdot8+4\cdot39&2\cdot12+4\cdot50\\5\cdot8+6\cdot39&5\cdot12+6\cdot50\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}16+156&24+200\\40+23&60+300\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}172&224\\274&3600\end{pmatrix}$$

$$A\cdot I=\begin{pmatrix}1&3&4\\5&6&7\\3&1&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\cdot1+0+0&1\cdot0+3\cdot1+4\cdot0&1\cdot0+3\cdot0+4\cdot1\\5\cdot1+6\cdot0+7\cdot0&5\cdot0+6\cdot1+7\cdot0&5\cdot0+6\cdot0+7\cdot1\\3\cdot1+1\cdot0+2\cdot0&3\cdot0+1\cdot1+2\cdot0&3\cdot0+1\cdot0+1\cdot2\end{pmatrix}=.$$

$$=\begin{pmatrix}1&3&4\\5&6&7\\3&1&2\end{pmatrix}$$

متر کس ترانسپوز:

فرض می نمایم که A یک متر کس مرتبه $m\times n$ باشد هرگاه سطر متر کس را به ستون و ستون انرا به سطر تبدیل نمایم درینصورت متر کس حاصله را ترنسپوز متر کس A گویند و انرا معمولاً به شکل A^T نشان می دهند مثلاً

$$A=\begin{pmatrix}2&5&3\\7&8&9\end{pmatrix}\Rightarrow A^T=\begin{pmatrix}2&7\\5&8\\3&9\end{pmatrix}$$

ترانسپوز یک متر کس ترانسپوز مساوی به خود متر کس است یعنی

$$\left(A^T\right)^T=A\Rightarrow\left(\left(a_{ig}\right)^T\right)^T=\left(a_{gi}\right)^T=\left(a_{ig}\right)=A$$

ترانسپوز حاصل جمع دو متر کس مساوی به حاصل جمع ترانسپوز هر کدام آن است.

$$\left(A\pm B\right)^T=A^T\pm B^T$$

ترانسپوز حاصل ضرب دو متر کس عبارت است از

$$\left(AB\right)^T=B^T\cdot A^T$$

$$\left(-A\right)^T=-A^T$$

مثال: هرگاه $A=\begin{pmatrix}2&3&4\\7&8&5\\4&1&9\end{pmatrix}$ باشد پس

$$A^T = \begin{pmatrix} 2 & 7 & 4 \\ 3 & 8 & 1 \\ 4 & 5 & 9 \end{pmatrix}$$

تمرین i. مترکس های ذیل را ضرب نمائید.

$$A = \begin{pmatrix} 8 & 5 & 2 \\ 7 & 8 & 1 \end{pmatrix} \quad , \quad B = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 5 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

ii. ترانسپوز مترکس های فوق را بدست آرید.

لکچر نهم

دیترمینانت Determinant

فرض می نمایم که $\mathbb{R}$ ست اعداد حقیقی و K_n^n ست تمام مترکس های مربعی باشد درینصورت تابع

$$\det : K_n^n \to \mathbb{R}$$
$$A \to |A| = \det A$$

رابنام دیترمینانت یاد می کنند طوریکه هر عنصر K_n^n تنها و تنها به یک عدد حقیقی $\mathbb{R}$ ار تباط داده می شود. و این عدد حقیقی در حقیقت دیترمینانت مترکس داده شده می باشد.

مثال i. فرض می نمایم که

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

مترکس مربعی مرتبه دوم باشد درینصورت دیترمینانت این مترکس را به $|A|$ نشان می دهند و

$$|A|=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}=a_{11}\,a_{22}-a_{21}\,a_{22}$$

هرگاه مترکس داده شده از مرتبه سوم یعنی 3×3 باشد یعنی

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

درینصورت دیترمینانت این مترکس را طورذیل دریافت می داریم

$$|A|=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{22} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

دو ستون اول این دیترمینانت را به طرف راست $|A|$ انتقال می دهیم

$$\left|\begin{array}{ccc:cc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} \end{array}\right.$$

عناصر قطر اصلی را با هم ضرب می نمایم و همان عناصریکه در شکل داده شده موازی به قطر اصلی اند به ترتیب بین هم ضرب می نمایم اشاره شان را مثبت می گیریم به این ترتیب.

$$a_{11}\ a_{12}\ a_{33} + a_{12}\ a_{23}\ a_{31} + a_{13}\ a_{21}\ a_{32}\ \ldots I$$

به عین شکل این عملیه را با قطر فرعی مترکس انجام داده داریم

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

عناصر قطر فرعی را باهم ضرب نموده و عناصر یکه روی یک خط موازی به قطر فرعی باشد به ترتیب باهم ضرب نموده اشاره شان را منفی می گریم به این ترتیب

$$-\left(a_{31}a_{22}a_{13} + a_{32}a_{23}a_{11} + a_{33}a_{21}a_{12}\right)\cdots II$$

حاصل جمع افاده های I و II دیترمینانت مترکس داده شده است. میتوان این موضوع را وقتیکه دوسطر اول و دوم را درپائین دیترمینانت بنویسیم، نیز انجام داد.

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{22} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}\ a_{12}\ a_{32} + a_{12}\ a_{23}\ a_{31} + a_{13}\ a_{21}\ a_{32} - (a_{31}a_{22}a_{13} + a_{33}a_{21}a_{12}$$

مثالها:

$i.$

$$|B| = \begin{vmatrix} 2 & 6 & -3 \\ 5 & 1 & 2 \\ 4 & -1 & 7 \end{vmatrix} = ?$$

$$|B| = \begin{vmatrix} 2 & 6 & -3 & 2 & 6 \\ 5 & 1 & 2 & 5 & 1 \\ 4 & -1 & 7 & 4 & -1 \end{vmatrix} = (2\cdot1\cdot7 + 6\cdot2\cdot4 + (-3)(5)(-1) - (4\cdot1\cdot(-3) + (-1)\cdot2\cdot2 + 7\cdot5\cdot6)$$

$$= (14 + 48 + 15) - (-12 - 4 + 210) =$$

$$= 77 - (210 - 16) = 77 - (194) = 77 - 194 = -117$$

خواص دیترمینانت:

1. دیترمینانت مترکس A و ترنسپوز آن A^T باهم مساوی است یعنی $\left|A^T\right| = |A|$.
2. هرگاه در یک مترکس یک سطر یا ستون صفر باشد دیترمینانت آن صفر است.
3. هرگاه در یک مترکس دو سطر یا دو ستون باهم مساوی باشد دیترمینانت آن صفر است.
4. هرگاه در یک مترکس یک سطر مضرب سطر دیگری باشد بازهم دیترمینانت آن صفر است.

5. هرگاه یک سطر یا ستون یک دیترمینانت در یک عدد ثابت $K \neq 0$ ضرب شود این به این معنا است که دیترمینانت ضرب K شده است.

مثال ها:

.1
$$A = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 6 \end{pmatrix} => A^T = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 6 \end{pmatrix}$$

$$|A| = 2 \cdot 6 - 3 \cdot 4 = 12 - 12 = 0 \ , \ |A^T| = 2 \cdot 6 - 3 \cdot 4 = 12 - 12 = 0$$

.2

.i
$$\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} = 0 \cdot 5 - 4 \cdot 0 = 0$$

.ii
$$\begin{vmatrix} 0 & 6 \\ 0 & 5 \end{vmatrix} = 0 \cdot 5 - 0 \cdot 6 = 0$$

.3
$$\begin{vmatrix} 3 & 4 & 2 \\ 5 & 4 & 1 \\ 3 & 4 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 4 & 2 \\ 5 & 4 & 1 \\ 3 & 4 & 2 \end{vmatrix} \begin{matrix} 3 & 4 \\ 5 & 4 \\ 3 & 4 \end{matrix} =$$
$$= (3 \cdot 4 \cdot 2 + 4 \cdot 1 \cdot 3 + 2 \cdot 5 \cdot 4) - (3 \cdot 4 \cdot 2 + 4 \cdot 1 \cdot 3 + 2 \cdot 5 \cdot 4) =$$
$$= (24 + 12 + 40) - (24 + 12 + 40) = 76 - 76 = 0$$

.4

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 4 & 8 & 12 \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 2 & 4 & 6 \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 2 \cdot 0 = 0$$

و این خاصیت پنجم دیترمینانت را نیز افاده می نماید.

طریقه انکشاف دیترمینانت

دیترمینانت یک مترکس را توسط فورمول ذیل انکشاف می دهند.

$$|A| \sum_{i,j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} |a_{ij}|$$

درین جا A_{ij} کوفکتور عنصر a_{ij} است که از حذف عنصری بدست اوری استi ام در سطر و ستون j ام قرار دارد توسط این فورمول دیترمینانت یک مترکس را نظر به یک سطر و یا نظر به یک ستون انکشاف می دهند مثلاً اگر مترکس 2×2 باشد و انرا نظر به سطر دوم انکشاف دهیم فورمول فوق شکل ذیل را بخود می گیرد

$$|A|\sum_{j=1}^{2}(-1)^{2+j}a_{2j}\,|a_{2j}|$$

که درینجا A_{2j} در حقیقت کوفکتور عنصر a_{2j} است که از حذف سطر دوم و ستون j – ام بدست امده است و بنابر این میتوان نوشت

$$|A|=\sum_{j=1}^{2}(-1)^{2+j}a_{2j}\,|A_{2j}|=$$

$$=(-1)^{2+1}a_{21}|A_{21}|+(-1)^{2+2}a_{22}|A_{22}|$$

مثال: دیترمینانت ذیل را نظر به فورمول فوق انکشاف دهید.

$$|A|=\begin{vmatrix}4 & 5\\ 3 & 6\end{vmatrix}$$

این دیترمینانت را نظر به سطر اول انکشاف می دهیم

$$|A|=\begin{vmatrix}4 & 5\\ 3 & 6\end{vmatrix}=(-1)^{1+1}4\cdot|6|+(-1)^{1+2}5|3|=$$

$$=(-1)^{2}\cdot 4\cdot 6+(-1)^{3}\cdot 5\cdot 3=$$

$$=24-15=9$$

.ii

$$|A|=\begin{vmatrix}2 & 6 & -3\\ 5 & 1 & 2\\ 4 & -1 & 7\end{vmatrix}=?$$

دیترمینانت فوق را نظر به ستون دوم انکشاف می دهیم

$$|A|=(-1)^{1+2}\cdot 6\begin{vmatrix}5 & 2\\ 4 & 7\end{vmatrix}+(-1)^{2+2}\cdot 1\cdot\begin{vmatrix}2 & -3\\ 4 & 7\end{vmatrix}+(-1)^{3+2}(-1)\cdot\begin{vmatrix}2 & -3\\ 5 & 2\end{vmatrix}=$$

$$=-6\cdot(5\cdot 7-4\cdot 2)+1\cdot(2\cdot 7+4\cdot 3)+(2\cdot 2+5\cdot 3)=$$

$$=-6(35-8)+(14+12)+(4+15)=$$

$$=-6(27)+26+19=-162+45=-117$$

معکوس ضربی یک مترکس:

مترکس B را معکوس ضربی مترکس A گویند هرگاه

$$A \cdot B = B \cdot A = I$$

باشد معمولاً معکوس ضربی مترکس A را به A^{-1} نشان دهند.

هرمترکس معکوس پذیر نخواهد یود همان مترکس معکوس پذیر است که دیترمینانت آن خلاف صفر باشد.

مثال: مترکس های $A = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 2 & -7 \end{pmatrix}$ و $B = \begin{pmatrix} -7 & -3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$ معکوس یکدیگر اند زیرا

$$\det A = \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 2 & 7 \end{vmatrix} = 7 - 6 = 1 \neq 0$$

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 2 & -7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -7 & -3 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (-1)\cdot(-7) + 3\cdot(-2) & (-1)(-3) + 3(-1) \\ 2\cdot(-7) + (-7)(-2) & 2\cdot(-3) + (-7)(-1) \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 7-6 & 3-3 \\ -14+14 & -6+7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$B \cdot A = \begin{pmatrix} -7 & -3 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 2 & -7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7\cdot(-1) + (-3)\cdot 2 & -7(3) + (-3)\cdot(-7) \\ (-2)(-1) + (-1)\cdot 2 & (-2)(3) + (-1)(-7) \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 7-6 & -21+21 \\ 2-2 & -6+7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

دیده شد که $A \cdot B = B \cdot A = I$

برای دریافت مترکس معکوس یک مترکس مترکس متوصله باید معرفی نمایم

مترکس متوصله $(Adjoin\ t \cdot Mat)$:

برای دریافت مترکس متوصله با احانیت کوفکتور هر عنصر دیترمینانت مترکس داده شده را دریافت می نمایم طور مثال مترکس 2×2 را درنظر گیریم $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$

$$\alpha_{11} = (-1)^{1+1}|A_{11}| \qquad \alpha_{12} = (-1)^{1+2}|A_{12}|$$
$$\alpha_{21} = (-1)^{2+1}|A_{21}| \qquad \alpha_{22} = (-1)^{2+2}|A_{22}|$$

بنابرین خواهیم داشت

$$B = \begin{pmatrix} \alpha_{11} - \alpha_{12} \\ -\alpha_{21} \ \ \alpha_{22} \end{pmatrix}$$

ترانسپوز این مترکس را دریافت می داریم

$$B' = \begin{pmatrix} \alpha_{11} - \alpha_{12} \\ -\alpha_{21} \ \ \alpha_{22} \end{pmatrix}$$

B' در حقیقت اجانیت مترکس A می باشد که اگر انرا در دیترمینانت مترکس A ضرب نمایم مترکس معکوس مترکس A را می دهند و این طریقه دریافت مترکس معکوس (   ) است.

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \cdot B' = \frac{1}{|A|} \begin{pmatrix} \alpha_{11} - \alpha_{12} \\ -\alpha_{21} \ \ \alpha_{22} \end{pmatrix}$$

مثال i. مترکس معکوس مترکس ذیل را دریافت نمائید.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 7 \end{pmatrix}$$

حل: دیده می شود که $\det A = (7-10) = -3 \neq 0$ است پس

$$\alpha_{11} = (-1)^{1+1}|7| \qquad \alpha_{22} = (-1)^{2+2}|1|$$
$$\alpha_{21} = (-1)^{2+1}|2| \qquad \alpha_{12} = (-1)^{1+2}|5|$$

بنابرین مترکس مربوط عبارت خواهد بود از $B = \begin{pmatrix} 7 & -5 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$

که ترانسپوز این مترکس مساوی می شود به

$$B' = \begin{pmatrix} 7 & -5 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} = adjA$$

$$A^{-1} = -\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 7 & -2 \\ -5 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{7}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{5}{3} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

ii. مترکس معکوس مترکس ذیل را دریافت نمائید.

$$C = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 4 \\ 2 & 1 & -2 \\ 1 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

$$|C|=\begin{vmatrix}-1 & 2 & 4\\ 2 & 1 & -2\\ 1 & 3 & 0\end{vmatrix}=(-1)^{3+1}\cdot 1\begin{vmatrix}2 & 4\\ 1 & -2\end{vmatrix}+(-1)^{3+2}\cdot 3\begin{vmatrix}-1 & 4\\ 2 & -2\end{vmatrix}=$$

$$=(2\cdot(-2)-4)+(-1)\cdot 3(2-6)=(-4-4)-3(2-8)=$$

$$=-83(-6)=-8+18=10\neq 0$$

حالاً کوفکتور های هر عنصر مترکس را دریافت می داریم

$$\alpha_{11}=(-1)^{1+1}\begin{vmatrix}1 & -2\\ 3 & 0\end{vmatrix}=6 \qquad \alpha_{12}=(-1)^{1+2}\begin{vmatrix}2 & -2\\ 1 & 0\end{vmatrix}=-2$$

$$\alpha_{13}=(-1)^{1+3}\begin{vmatrix}2 & 1\\ 1 & 3\end{vmatrix}=6-1=5 \qquad \alpha_{22}=(-1)^{2+2}\begin{vmatrix}-1 & 4\\ 1 & 0\end{vmatrix}=-4$$

$$\alpha_{23}=(-1)^{2+3}\begin{vmatrix}-1 & 2\\ 1 & 3\end{vmatrix}=-(-2-2)=5 \qquad \alpha_{31}=(-1)^{3+1}\begin{vmatrix}2 & 4\\ 1 & -2\end{vmatrix}=-4-4=-8$$

$$\alpha_{32}=(-1)^{3+2}\begin{vmatrix}-1 & 2\\ 2 & -2\end{vmatrix}=-(2-4)=2 \qquad \alpha_{33}=(-1)^{3+3}\begin{vmatrix}-1 & 2\\ 2 & 1\end{vmatrix}=-1-4=-5$$

$$a_{21}=(-1)^{2+1}\begin{vmatrix}2 & 4\\ 3 & 0\end{vmatrix}=-(-2)=12$$

$$B=\begin{pmatrix}6 & -2 & 5\\ 12 & -4 & 5\\ -8 & 2 & -5\end{pmatrix}\Rightarrow B=adjA=\begin{pmatrix}6 & 12 & -8\\ -2 & -4 & 2\\ 5 & 5 & -5\end{pmatrix}$$

$$A^{-1}=\frac{1}{10}adjA=\frac{1}{10}\begin{pmatrix}6 & 12 & -8\\ -2 & -4 & 2\\ 5 & 5 & -5\end{pmatrix}$$

لکچر دهم

سیستم معادلات خطی

ستسم معادلات خطی که دارای m معادله و n مجهول باشد شکل عمومی ذیل را دارا است

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ &\vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n &= b_m \end{aligned}$$

که دراین جا $a_{ij} \in \mathbb{R}$ ضرایب طرف چپ سیستم و $b_i \in \mathbb{R}$ ضرایب طرف راست و یا بنام ثوابت سیستم است هر گاه اقلاً برای یک $i \in \mathbb{R}$ ..... طرف راست سیستم خلاف صفر باشد این سیستم را سیستم غیر متجانس و اگر برای تمام $l \in \mathbb{R}$...... مذکور صفر باشد بنام سیستم متجانس یاد می کنند.

در اینجا اکثراً به همان سیستم معادلات سروکار خواهیم داشت که $m=n$ باشد یعنی در سیستم دارای n معادله و n مجهول باشد طور مثال برای $n=2$

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 &= b_2 \end{aligned}$$

و برای $n=3$ چنین شکل خواهد داشت

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_2x_2 + a_{23}x_3 &= b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 &= b_3 \end{aligned}$$

اگر مترکس ضرایب طرف چپ را تشکیل دهیم چنین شکل خواهد داشت

برای $n=2$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

واگر مترکس مجهول های آنرا تشکیل دهیم شکل $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ و ثوابت شکل $\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$ را خواهد داشت. پس سیستم معادلات خطی دو مجهوله در دو معادله و سیستم معادلات خطی سه مجهوله در سه معادله به اشکال ذیل میتوان نوشت:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$$

اشکال سیستم معادلات خطی فوق را شکل مترکسی سیستم معادلات گویند که میتوان آنرا به شکل ساده ذیل نوشت:

$$AX=B$$

حل سیستم معادلات خطی دو مجهوله:

سیستم معادلات خطی دو مجهوله را حل نماید

$$a_1x_1+b_1x_2=c_1$$
$$b_1x_2+b_2x_2=c_2$$

شکل مترکس سیستم فوق چنین خواهد بود

$$\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix}$$

ویا

$$AX=B$$

هرگاه مترکس $A=\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix}$ معکوس پذیر باشد در این صورت معکوس آنرا به A^{-1} نشان می دهیم و اطراف سیستم را از طرف چپ به A^{-1} ضرب می نمایم

$$A^{-1}(A.X)=A^{-1}B$$
$$(A^{-1}.A)x=A^{-1}B$$
$$I.x=A^{-1}B$$
$$x=A^{-1}B$$

مثال های سیستم معادلات ذیل را حل نماید

$$x+2y=5$$
$$x+3y=7$$

مترکس ضرایب طرف چپ آن $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ میباشد. و

$$det\,A = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 3-2 = 1 \neq 0$$

حالاً $adj\,A$ را بدست می آوریم

$$x_{11} = (-1)^{1+1}.|3| = 3 \qquad x_{12} = (-1)^{1+2}.|1| = -1$$

$$x_{21} = (-1)^{1+2}.|2| = -2 \qquad x_{22} = (-1)^{2+2}.|1| = 1$$

بنابراین داریم

$$B = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow B = adjA = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

در نتیجه

$$A^{-1} = \frac{1}{1A1}.adjA$$

$$= \frac{1}{1}.\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

چون

$$X = A^{-1}B$$

است پس

$$\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 \\ 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = x$$

$$\begin{pmatrix} 15 & -14 \\ -5 & +7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{matrix} x_1 = 1 \\ x_2 = 2 \end{matrix}$$

$.ii$

$$5x - 2y = 2$$
$$3x - y = 3$$

از اینجا متیوان نوشت

$$\begin{pmatrix} 5 & -2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

حالا معکوس مترکس طرف چپ سیستم معادلات خطی که در شکل مترکس فوق است، بدست آوریم

$$|A| = \begin{vmatrix} 5 & -2 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = -5 + 6 = 1 \neq 0$$

$$x_{11} = (-1)^{1+1} . |-1| = -1 \qquad x_{12} = (-1)^{1+2} . |3| = -3$$

$$x_{21} = (-1)^{2+1} . |-2| = 2 \qquad x_{22} = (-1)^{2+2} . |5| = 1$$

$$adjA = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -3 & 5 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{1}\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -3 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -3 & 5 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -3 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} -2 & +6 \\ -6 & +15 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 4 \\ 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} x = 4 \\ y = 9 \end{matrix}$$

مثال3: سیستم معادلات خطی ذیل را بدست آرید

$$\begin{aligned} 3x - 2y + 2z &= -4 \\ x + 3y + z &= 5 \\ 2x + 2y - z &= 11 \end{aligned}$$

برای ایکه بدانیم سیستم حل دارد و دیترمینانت ضرایب طرف چپ را بدست می آوریم

$$|A| = \begin{vmatrix} 3 & -2 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \\ 2 & 2 & -1 \end{vmatrix} = -29 \neq 0$$

حالاً معکوس این مترکس را بدست م آوریم و برای این هدف داریم

$$\alpha_{11}=(-1)^{1+1}\begin{vmatrix}3 & 1\\ 2 & -1\end{vmatrix}=-3-2=-5$$

$$\alpha_{12}=(-1)^{1+2}\begin{vmatrix}1 & 1\\ 2 & -1\end{vmatrix}=-(-1-2)=3\alpha$$

$$\alpha_{13}=(-1)^{1+3}\begin{vmatrix}1 & 3\\ 2 & 2\end{vmatrix}=2-6=-4$$

$$\alpha_{21}=(-1)^{2+1}\begin{vmatrix}-2 & 2\\ 2 & -1\end{vmatrix}=-(2-4)=2$$

$$\alpha_{22}=(-1)^{2+2}\begin{vmatrix}3 & 2\\ 2 & -1\end{vmatrix}=-3-4=-7$$

$$\alpha_{23}=(-1)^{2+3}\begin{vmatrix}3 & -2\\ 2 & 2\end{vmatrix}=-(6+4)=-10$$

$$\alpha_{31}=(-1)^{3+1}\begin{vmatrix}-2 & 2\\ 3 & 1\end{vmatrix}=-2-6=-8$$

$$\alpha_{32}=(-1)^{3+2}\begin{vmatrix}3 & 2\\ 1 & 1\end{vmatrix}=-(3-2)=-1$$

$$\alpha_{33}=(-1)^{3+3}\begin{vmatrix}3 & -2\\ 1 & 3\end{vmatrix}=(9+2)=11$$

بنابر این

$$B=\begin{pmatrix}-5 & 3 & -4\\ 2 & -2 & -10\\ -8 & -1 & 11\end{pmatrix}\Rightarrow B'=adjA=\begin{pmatrix}-5 & 2 & -8\\ 3 & -7 & -1\\ -4 & -10 & 11\end{pmatrix}$$

$$A^{-1}=-\frac{1}{29}\begin{pmatrix}-5 & 2 & -8\\ 3 & -7 & -1\\ 4 & -10 & 11\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5/29 & 2/29 & +8/29\\ -3/29 & 7/29 & 1/29\\ 4/29 & 10/29 & -11/29\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}5/29 & -2/29 & 8/29\\ -3/29 & 7/29 & 1/29\\ 4/29 & +10/29 & -11/29\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-4\\ 5\\ 11\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -20/29 & +\ 10/29 & +\ 88/29 \\ 12/29 & +\ 35/29 & +\ 11/29 \\ -16/29 & +50/29 & +\ 121/29 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} \frac{-20-10+88}{29} \\ \frac{12+35+11}{29} \\ \frac{-16+50+121}{29} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} \frac{58}{29} \\ \frac{58}{29} \\ \frac{-87}{29} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{aligned} x &= \frac{58}{29} = 2 \\ y &= \frac{58}{29} = 2 \\ z &= \frac{-87}{29} = -3 \end{aligned}$$

حل سیستم معادلات خطی به طریقه گرامر:

در این طریقه نیز برای اینکه سیستم حل داشته باشد باید مترکس ضرایب طرف چپ دارای دیترمینانت خلاف صفر باشد و برای دریافت مجهول ها از فورمول ذیل باید استفاده کرد

$$x_i = \frac{|x_1, x_2, \cdots, B, \cdots, x_n|}{|x_1, x_2, \cdots, x_i, \cdots, x_n|}$$

در اینجا مخرج کسر دیترمینانت ضرایب طرف چپ است این فورمول برای دریافت جذر x_l به کار می رود و اگر x_1 را بدست آریم چنین خواهد شد

$$x_i = \frac{|B, x_2, ..., x_l, ..., x_n|}{|x_1, x_2, ..., x_i, ..., x_n|}$$

و برای $l = 2$ (x_2) خواهیم داشت

$$x_2 = \frac{|x_1, B, x_3, \cdots, x_l, \cdots, x_n|}{|x_1, x_2, \cdots, x_i, \cdots, x_n|}$$

مثال اول:

$$\begin{aligned} x + 2y &= 5 \\ x + 3y &= 7 \end{aligned}$$

در مرحله اول باید دید که دیترمینانت ضرایب دست چپ خلاف صفر است.

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 3 - 2 = 1 \neq 0$$

حالاً قیمت های x و y را نظر به فورمول کرامر بدست می آوریم

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 7 & 3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix}} = \frac{|15-14|}{|3-2|} = \frac{1}{1} = 1$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 1 & 7 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix}} = \frac{|17-15|}{|3-2|} = \frac{2}{1} = 2$$

مثال دوم:

$$\begin{aligned} 3x - 2y + 2z &= -4 \\ x + 3y + z &= 5 \\ 2x + 2y - z &= 11 \end{aligned}$$

باز هم دیده میشود که دیترمینانت ضرایب دست چپ خلاف صفر است یعنی

$$det\begin{pmatrix} 3 & -2 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix} = -29 \neq 0$$

$$x = \frac{\begin{vmatrix} -4 & -2 & 2 \\ 5 & 3 & 1 \\ 11 & 2 & -1 \end{vmatrix}}{-29} = \frac{-58}{-29} = 2$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 3 & -4 & 2 \\ 1 & 5 & 1 \\ 2 & 11 & -1 \end{vmatrix}}{-29} = \frac{-58}{-29} = 2$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 3 & -2 & -4 \\ 1 & 3 & 5 \\ 2 & 2 & 11 \end{vmatrix}}{-29} = \frac{87}{-29} = -3$$

تمرین: هر کدام از سیستم های معادلات ذیل را به طریقه مترکس معکوس و کرامر حل نمایند.

1) $\begin{aligned} x_1 - 2x_2 &= 4 \\ 2x_1 + 4x_2 &= 5 \end{aligned}$

2) $\begin{aligned} 2x + y + z &= 6 \\ x - 2y + 2z &= 10 \\ 3x - y - z &= 4 \end{aligned}$

لکچر یازدهم

حل سیستم معادلات خطی به طریقه گاوس Gauss

قبل از اینکه حل سیستم معادلات خطی را به طریقه گاوس مطالعه نمایم لازم است بعضی از مفاهیم مقدماتی که در طریقه فوق ضروری است یاد آوری نمایم این مفاهیم عبارت از عملیه های مقدماتی در مترکس ها است.

عملیه های مقدماتی در مترکس ها:

عملیه های مقدماتی در مترکس ها عبارت اند از:

1) تعویض یک سطر با سطر دیگر و یا تعویض یک ستون با ستون دیگر
2) یک سطر را به سطر دیگر علاوه کردن و یا یک ستون را به ستون دیگر علاوه کردن
3) یک سطر را در یک سکالر (عدد) خلاف صفر ضرب نمودن ویا اینکه یک ستون را در یک عدد خلاف صفر ضرب نمایم.

با استفاده از این عملیه ها میتوان یک مترکس را به مترکس مثلثی ویا یک مترکس را به مترکس واحد تبدیل نمود.

مثال i): مترکس ذیل را به مترکس مثلثی تبدیل نماید.

$$A=\begin{pmatrix}1&3&2\\2&5&3\\3&4&1\end{pmatrix}\xrightarrow{R_2+(-2R_1)}\begin{pmatrix}1&3&2\\0&-1&-1\\3&4&1\end{pmatrix}\xrightarrow{R_3+(-3R_1)}$$

$$\begin{pmatrix}1&3&2\\0&-1&-1\\0&-5&-5\end{pmatrix}\xrightarrow{-R_2}\begin{pmatrix}1&3&2\\0&1&1\\0&-5&-5\end{pmatrix}\xrightarrow{-\frac{1}{5}R_3}\begin{pmatrix}1&3&2\\0&1&1\\0&1&1\end{pmatrix}\xrightarrow{R_3+(-R_2)}\begin{pmatrix}1&3&2\\0&1&1\\0&0&0\end{pmatrix}$$

و این عبارت از مترکس مثلثی است. طوریکه عملیه های مقدماتی دارای چنین انجام داده شده است

- در مرحله اول به سطر دوم منفی دو چند سطر اول جمع شده است
- در مرحله دوم به سطر سوم منفی سه چند سطر اول جمع شده است
- درمرحله سوم سطر دوم به منفی یک ضرب شده است
- در مرحله چهارم سطر سوم به $-\frac{1}{5}$ضرب شده است
- در مرحله پنجم سطر دوم به -1 ضرب و یا سطر سوم جمع شده است.

:(ii

$$A=\begin{pmatrix}2 & -1 & 4\\ 1 & 2 & -2\\ 3 & 1 & 0\end{pmatrix}\xrightarrow{\mathbb{R}_1\rightleftarrows\mathbb{R}_2}\begin{pmatrix}1 & 2 & -2\\ 0 & -1 & 4\\ 3 & 1 & 0\end{pmatrix}\xrightarrow{\mathbb{R}_2+(-2\mathbb{R}_1)}\begin{pmatrix}1 & 2 & -2\\ 0 & -5 & 8\\ 0 & -5 & -5\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{\mathbb{R}_3+(-3\mathbb{R}_1)}\begin{pmatrix}1 & 2 & -2\\ 0 & -5 & 8\\ 0 & -5 & 6\end{pmatrix}\xrightarrow{\mathbb{R}_2+(-\mathbb{R}_3)}\begin{pmatrix}1 & 2 & -2\\ 0 & 0 & 2\\ 0 & -5 & 6\end{pmatrix}\xrightarrow{\mathbb{R}_2\rightleftarrows\mathbb{R}_3}\begin{pmatrix}1 & 2 & -2\\ 0 & -5 & 6\\ 0 & 0 & 2\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{\frac{1}{2}\mathbb{R}_3}\begin{pmatrix}1 & 2 & -2\\ 0 & -5 & 6\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\xrightarrow{\mathbb{R}_2+(-6\mathbb{R}_3)}\begin{pmatrix}1 & 2 & -2\\ 0 & -5 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\xrightarrow{-\frac{1}{5}\mathbb{R}_2}\begin{pmatrix}1 & 2 & -2\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{\mathbb{R}_1+(2\mathbb{R}_3)}\begin{pmatrix}1 & 2 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\xrightarrow{\mathbb{R}_1+(-2\mathbb{R}_2)}\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

دیده شده که مترکس آخری یک مترکس است که درهر سطر حدود $a_{ii}\,(i=1,2,3)$ عدد یک قرار دارد ولی دانیم که این یک مترکس واحد است. عملیه های مقدماتی در آن طور ذیل انجام داده شده است.

- در مرحله اول به سطر اول و دوم تعویض شده است.
- در مرحله دوم به سطر دوم منفی شده چند سطر اول علاوه شده است.
- در مرحله سوم به سطر سوم منفی شده چند سطر اول علاوه شده است.
- در مرحله چهارم سطر سوم به منفی یک ضرب و با سطر دوم جمع شده است.
- در مرحله پنجم سطر سوم و سطر دوم تعویض شده است.
- در مرحله ششم سطر سوم به $\frac{1}{2}$ ضرب شده است.
- در مرحله هفتم سطر سوم به -6 ضرب و به سطر دوم علاوه شده است.
- در مرحله هشتم سطر دوم به $-\frac{1}{5}$ ضرب شده است.
- در مرحله نهم سطر سوم به -2 ضرب و به سطر اول جمع شده است.
- در مرحله دهم سطر دوم به -2 ضرب و به سطر اول جمع شده است.

نوت i: میتوان دو عملیه را همزمان یعنی در یک وقت انجام داد و این مربوط به تمرین شاگردان است.

ii): کوشش شود که در عملیه های مقدماتی در مترکس از عملیه های سطری کار گرفته شود با استفاده از معلومات فوق میتوانیم سیستم معادلات خطی را توسط طریقه گاوس حل نمایم.

طریقه گاوس:

در این طریقه در مرحله اول مترکس ضرایب طرف چپ سیستم را با ثوابت طرف راست (مترکس انکشاف یافته) یکجا می نویسیم سپس بالای این مترکس عملیه های مقدماتی را انجام داده مترکس مذکور به شکل مترکس مثلثی تبدیل می گردد. در حقیقت این مترکس را معادل (سطری یا ستونی) مترکس اولی گوید. از روی مترکس مثلثی میتوان سیستم مذکور را به آسانی حل نمود.

مثال ها:

i): سیستم معادلات خطی دو مجهوله ذیل را به طریقه گاوس حل نمائید.

$$\begin{aligned} x+2y&=5 \\ x+3y&=7 \end{aligned}$$

در قدم اول مترکس انکشاف یافته را می نویسیم

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & \vdots & 5 \\ 1 & 3 & \vdots & 7 \end{pmatrix}$$

حالاً عملیه های مقدماتی را بالای آن تطبیق می نمایم

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & \vdots & 5 \\ 1 & 3 & \vdots & 7 \end{pmatrix} \xrightarrow{\mathbb{R}_2+(-\mathbb{R}_3)} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{\mathbb{R}_1+(-2\mathbb{R}_2)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

این مترکس یک مترکس مثلثی است و از روی آن میتوان x و y را به آسانی بدست آورد. در سطر دوم عدد 1 در حقیقت ضریب y بوده و 2 در حقیقت ثابت طرف راست سیستم است یعنی

$$0.x+1.y=2$$

و از اینجا

$$y=2$$

در سطر دوم 1 در حقیقت ضریب x بوده و 1 طرف راست ثابت طرف راست سیستم میباشد یعنی

$$1.x+0.y=1$$

و از اینجا

$$x=1$$

پس حل سیستم فوق $(x,y)=(1,2)$ میباشد

ii): سیستم معادلات خطی دو مجهوله را به طریقه گاوس حل نمائید

$$\begin{aligned} x + 2y &= -3 \\ 2x - y &= 4 \end{aligned}$$

مانند مثال اول اقدام نموده داریم

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & \vdots & -3 \\ 2 & -1 & \vdots & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow{\mathbb{R}_2 + (-2\mathbb{R}_1)} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -5 & 10 \end{pmatrix} \xrightarrow{-\frac{1}{5}\mathbb{R}_2} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{\mathbb{R}_1 + (-2\mathbb{R}_2)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{aligned} 1.x + 0y &= 1 \\ 0.x + 1y &= -2 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \begin{aligned} x &= 1 \\ y &= -2 \end{aligned}$$

حالاً با استفاده از طریقه گاوس سیستم معادلات خطی سه مجهوله را حل می نمایم

$$\begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 & \vdots & -6 \\ 1 & 2 & -3 & \vdots & 11 \\ 3 & -2 & -2 & \vdots & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{\mathbb{R}_1 \rightleftarrows \mathbb{R}_2} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 11 \\ 2 & -3 & 1 & -6 \\ 3 & -2 & -2 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{\mathbb{R}_2 + (-2\mathbb{R}_1)}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & -6 \\ 1 & -7 & 7 & 11 \\ 3 & -2 & -2 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{\mathbb{R}_3 + (-3\mathbb{R}_1)} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 11 \\ 0 & -7 & 7 & -28 \\ 0 & -8 & -7 & -31 \end{pmatrix} \xrightarrow{\frac{1}{7}\mathbb{R}_2} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 11 \\ 0 & 1 & -1 & 4 \\ 0 & -8 & 7 & -31 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{\mathbb{R}_3 + 8\mathbb{R}_2} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 11 \\ 0 & 1 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & -1 & +1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{aligned} x + 2y - 3z &= 11 \\ y - z &= 4 \quad \Rightarrow z = -1 \\ -z &= 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & y - z = y + 1 = 4 \\ & \Rightarrow \boxed{y = 3} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2x - 3y + z &= -6 \\ 2x - 3.3 - 1 &= -6 \\ 2xx - 9 - 1 &= -6 \\ 2x &= -6 + 10 = 4 \\ & \boxed{x = 2} \end{aligned}$$

مثال ها: i)

$$\begin{aligned} 2x - 3y + z &= -6 \\ x + 2y - 3z &= 11 \\ 3x - 2y - 2z &= 2 \end{aligned}$$

مترکس انکشاف یافته آنرا تشکیل نموده عملیه های مقدماتی را بالای آن تطبیق می نماید.

$$\begin{pmatrix}1 & 2 & 1 & -6\\ 1 & -7 & 7 & 11\\ 3 & -2 & -2 & 2\end{pmatrix}\xrightarrow{\mathbb{R}_3+(-3\mathbb{R}_1)}\begin{pmatrix}1 & 2 & -3 & 11\\ 0 & -7 & 7 & -28\\ 0 & -8 & -7 & -31\end{pmatrix}\xrightarrow{\frac{1}{7}\mathbb{R}_2}\begin{pmatrix}1 & 2 & -3 & 11\\ 0 & 1 & -1 & 4\\ 0 & -8 & 7 & -31\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{\mathbb{R}_3+8\mathbb{R}_2}\begin{pmatrix}1 & 2 & -3 & 11\\ 0 & 1 & -1 & 4\\ 0 & 0 & -1 & +1\end{pmatrix}\Rightarrow\quad \begin{array}{l}x+2y-3z=11\\ y-z=4 \qquad \Rightarrow z=-1\\ -z=1\end{array}$$

$$\begin{array}{l}y-z=y+1=4\\ \Rightarrow \boxed{y=3}\end{array}$$

$$\begin{array}{l}2x-3y+z=-6\\ 2x-3.3-1=-6\\ 2xx-9-1=-6\\ 2x=-6+10=4\\ \boxed{x=2}\end{array}$$

:(ii

$$\begin{array}{l}2x_1+4x_2+6x_3=18\\ 4x_1+5x_2+6x_3=24\\ 2x_1+7x_2+12x_3=40\end{array}$$

مترکس انکشاف یافته عبارت است از

$$\begin{pmatrix}2 & 4 & 6 & \vdots & 18\\ 4 & 5 & 6 & \vdots & 24\\ 2 & 7 & 12 & \vdots & 40\end{pmatrix}\xrightarrow{\frac{1}{2}\mathbb{R}_1}\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 9\\ 4 & 5 & 6 & 24\\ 2 & 7 & 12 & 40\end{pmatrix}\xrightarrow{\mathbb{R}_3+(-2\mathbb{R}_1)}\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 9\\ 4 & 5 & 6 & 24\\ 0 & 3 & 6 & 22\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{\mathbb{R}_2+(-4\mathbb{R}_1)}\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 9\\ 0 & -3 & -6 & -12\\ 0 & 3 & 6 & 22\end{pmatrix}\longrightarrow\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 9\\ 0 & -3 & -6 & -12\\ 0 & 0 & 0 & 10\end{pmatrix}\Rightarrow \begin{array}{l}x_1+2x_2+3x_3=9\\ -3x_2-6x_3=12\\ 0.x_1+0.x_2+0.x_3=10\end{array}$$

در معادله سوم سیستم داده شده دیده میشود که

$$0=10$$

است و این امکان ندارد بنابرین میتوان گفت که سیستم معادلات خطی داده شده حل ندارد.

تمرین:

سیستم معادلات خطی ذیل را توسط طریقه گاوس حل نمایید.

(1
$$\begin{aligned} 3x + y &= 1 \\ 2x - 3y &= 7 \end{aligned}$$

(2
$$\begin{aligned} x + y + z &= 1 \\ x - y - z &= 2 \\ 2x + y - 2z &= 1 \end{aligned}$$

(3
$$\begin{aligned} 2x - 3y &= 0 \\ 3x + 2y &= 5 \end{aligned}$$

(4
$$\begin{aligned} x + y - az &= 0 \\ ax + 2y - z &= 0 \\ 2x + ay + 2z &= 0 \end{aligned}$$

لکچر دوازدهم

حاصل ضرب سکالری و حاصل ضرب وکتوری

دو وکتور

فرض می نمایم که U_1و $\overrightarrow{U_2}$ دور کتور در مستوی و یا فضا باشند طوریکه هر دوی آن خلاف صفر اند. حاصل ضرب سکالری این دو وکتور که به شکل $\overrightarrow{U_1}\ \overrightarrow{U_2}$ نشان می دهند عبارت است از:

$$\overrightarrow{U_1}\overrightarrow{U_2} = |U_1|.|U_2|.Cos\alpha$$

طوریکه α زاویه بین وکتور های $\overrightarrow{U_1}\ \overrightarrow{U_2}$ بوده و ضمناً فرض می نمایم که $0 \le \alpha \le \pi$ باشد حاصل ضرب سکالری دو وکتور را در نظر گرفته داریم:

$$\vec{i}.\vec{i} = |\vec{i}|.|\vec{i}|.Cos\alpha$$

چون $\alpha = 0$است پس $\vec{i}.\vec{i} = 1.1.Cos0^0 = 1$

همچنان اگر $\vec{i}$ و $\vec{j}$ را در نظر بگریم داریم $\vec{i}.\vec{j} = |\vec{i}|.|\vec{j}|.Cos\alpha$

چون در این حالت $\alpha = \pi/2$ است پس $\vec{i}.\vec{j} = |\vec{i}|.|\vec{j}|.Cos\pi/2 =$

$$= 1.1.0 = 0$$

بنابراین میتوان توانست

$$\left.\begin{array}{l} \vec{i}\cdot\vec{j} = 1\ ,\vec{j}\cdot\vec{j} = 1 \quad \bar{k}\cdot\bar{k} = 1 \\ \vec{i}\cdot\vec{j} = 0\ \vec{j}\vec{k} = 0 \quad \vec{j}\cdot\vec{k} = 0 \end{array}\right\}\cdots I$$

به همین قسم در حاصل ضرب سکالری دو وکتور خاصیت تبادلوی را صدق می نماید یعنی

$$\overrightarrow{U_1}.\overrightarrow{U_2} = \overrightarrow{U_2}\overrightarrow{U_1}$$

هر گاه $\overrightarrow{U_1}$ و $\overrightarrow{U_2}$ هر در خلاف صفر بوده و $\overrightarrow{U_1}\overrightarrow{U_2} = 0$ باشد در اینصورت گویند که $\overrightarrow{U_1}.\overrightarrow{U_2}$ هم عمود اند به همین

$$\overrightarrow{U_1} = \alpha_1.\vec{i} + \alpha_2\vec{j}$$

قسم اگر وکتور $\overrightarrow{U_1}.\overrightarrow{U_2}$ قسم ذیل افاده شده باشد

$$\overrightarrow{U_2} = \beta_1\vec{i} + \beta_2\vec{j}$$

پس

$$\overrightarrow{U_1}\overrightarrow{U_2} = \left(\alpha_1.\vec{i} + j_2\vec{1}\right)\left(\beta_1.\vec{i} + \beta_2.\vec{j}\right) = \alpha_1.\beta_1\vec{i}.\vec{i} + \alpha_1.\beta_2.\vec{i}.\vec{j} + \alpha_2.\beta_1.\vec{j}.\vec{i} + \alpha_2\beta_1.\vec{j}.\vec{j}$$

$$\overrightarrow{U_1}.\overrightarrow{U_2} = \alpha_1\beta_1 + \alpha_2\beta_2$$

و ازایجا نظر به روابط I حاصل ضرب سکالری خاصیت توزیعی را صدق می نماید اگر $\overrightarrow{U_3}.\overrightarrow{U_2}.\overrightarrow{U_1}$ سه وکتور باشد:

پس
$$\overrightarrow{U_1}\left(\overrightarrow{U_2} + \overrightarrow{U_3}\right) = \overrightarrow{U_1}.\overrightarrow{U_2} + \overrightarrow{U_1}.\overrightarrow{U_3}$$

مثالi) هرگاه $U_1 = a_1\vec{i} + a_2\vec{j} + a_3\vec{k}$ و $U_2 = b_1\vec{j} + b_2\vec{j} + b_3\vec{k}$

$$\overrightarrow{U_1}.\overrightarrow{U_2} = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3$$

مثالii) هر گاه $\overrightarrow{U_1} = \overrightarrow{2i} - \overrightarrow{4j} + \overrightarrow{5k}$ و $\overrightarrow{U_2} = \overrightarrow{U_1} - \overrightarrow{3j} - \overrightarrow{41c}$ باشد ثبوت نمائید که $U_1.U_2 = 0$ است.

$\overrightarrow{U_1}.\overrightarrow{U_2} = \left(\overrightarrow{2_1} - \overrightarrow{4g} + \overrightarrow{5k}\right)\left(\overrightarrow{4_2} - \overrightarrow{3g} - \overrightarrow{4k}\right) =$

$= 1.4 + (-4).(-3) + 5.(-4) =$

$= 8 + 12 - 20 = 0$

iii) قیمت را طوری پیدا نمائید که وکتور های

$U_1 = 2\vec{i} + \alpha\vec{j} + \alpha 5\vec{k}$

$U_2 = 3\vec{i} + \vec{j} + \alpha\vec{k}$

به یک عمود باشند

$\overrightarrow{U_1} \cdot \overrightarrow{U_2} = \left(\overrightarrow{2i} + \overrightarrow{\alpha j} + \overrightarrow{5k}\right)\left(\overrightarrow{3i} + \vec{j} + \overrightarrow{\alpha k}\right) =$

$= 6 + \alpha + 5\alpha = 6\alpha + 6 = 0 \Rightarrow (\alpha = -1)$

مثالiv) نشان دهید که وکتور های $\overrightarrow{3i} - \overrightarrow{4j} - \overrightarrow{4k}, \vec{i} - \overrightarrow{3j} - \overrightarrow{5k}, \overrightarrow{2i} - \vec{j} + \vec{k}$ اضلاع یک مثلث قایم الزاویه اند.

حل) فرض می نایم که وکتور $U_1 = \overrightarrow{2i} - \vec{j} + \vec{k}$ ضلع AB مثلث و $U_2 = \vec{i} - \overrightarrow{3j} - \overrightarrow{5k}$ ضلع BC مثلث مذکور باشد این دو ضلع را در نظر می گریم $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} = \left(\overrightarrow{2i} - \vec{j} + \vec{k}\right)\left(\vec{i} - \overrightarrow{3j} - \overrightarrow{5k}\right) = 2 + 3 - 5 = 0$
بنابراین این دو ضلع مثلث بریکدیگر عمود اند. حالا این دو ضلع را به شکل وکتوری با هم جمع نموده می بینیم که وکتور سوم را می دهد یا چطور.

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \left(\overrightarrow{2i} - \vec{j} + \vec{k}\right) + \left(\vec{i} - \overrightarrow{3j^3} - \overrightarrow{5k}\right) = \overrightarrow{3i} - \overrightarrow{4j} - \overrightarrow{4k} = \overrightarrow{AC}$$

حاصل ضرب وکتوری دو وکتور

تعریف: فرض نمایم که U_1 و U_2 دو وکتور خلاف صفر بوده حاصل ضرب وکتوری U_1 و U_2را که به شکل $U_1 \cdot U_2$ نشان می دهند عبارت است از:

طوریکه $U=(6\ ,-5)=\alpha_1 U_2=5\left(\overrightarrow{2i}+\overrightarrow{1}+\overrightarrow{4j}-\overrightarrow{3k}\right)+2\left(\vec{i}+\overrightarrow{2j}+\overrightarrow{2k}\right)$ α زاویه بین وکتور های U_1 و U_2 بوده و $0\le\alpha\le\pi$ را در نظر می گیرند و $\overrightarrow{N}$ عبارت از واحد وکتوری است که عمود به مستوی می باشد که توسط وکتور های U_1 و U_2 تشکیل گردیده اند حاصل ضرب وکتوری به واسطه قاعده دست راست نشان داده می شود.

قبل از اینکه حاصل ضرب وکتوری دو وکتور را توضیحات بیشتر دهیم در مرحله اول ترکیب خطی را معرفی می نمایم.

تعریف: فرض می نمایم که $\{x_1,x_2\cdots x_n\}$ ست وکتورهای $\alpha_1.\alpha_2...\alpha_n$ سکالرها باشند درینصورت $\alpha_1x_1+\alpha_2x+...+\alpha_nx_n$ را بنام ترکیب خطی وکتور های $x_1.x_2...x_n$ یاد می کند.

مثال) هرگاه $U_1\overrightarrow{2i}+\vec{j}-\overrightarrow{3k}$ و $U_2\vec{i}+\overrightarrow{2j}+\overrightarrow{2k}$ وکتور های داده شده باشند ترکیب خطی انها را بدست گررید طوریکه $\alpha_1=5$ و $\alpha_2=2$ باشد.

$$U=(6\ ,-5)=\alpha_1U_2=5\left(\overrightarrow{2i}+\overrightarrow{1}+\overrightarrow{4j}-\overrightarrow{3k}\right)+2\left(\vec{i}+\overrightarrow{2j}+\overrightarrow{2k}\right)$$

$$=\overrightarrow{10i}+\overrightarrow{5j}-\overrightarrow{15k}+\overrightarrow{2i}+\overrightarrow{4j}+\vec{k}=$$

$$\overrightarrow{12i}+\overrightarrow{9J}-\overrightarrow{11ic}$$

درینصورت گویند که وکتور U به قسم ترکیب خطی وکتور های U_1و U_2 ارایه شده است.

مثال)هرگاه $U_1=(2,3)$ و $U_2=(5,1)$ دو وکتور باشند وکتور $U\ =(6,3)$ را به قسم ترکیب خطی U_1 و U_2 ارایه نمایند.

$$U=(6\ ,-5)=\alpha_1(2\ ,3)+\alpha_2(5\ ,1)$$

$$=(2\alpha_1,3\alpha_1)+(5\alpha_2,\alpha_2)(6\ ,-5)=(2\alpha_1+5\alpha_2,3\alpha_1+\alpha_2)$$

$$\left.\begin{matrix}2\alpha_1+5\alpha_2=6\\3\alpha_1+\alpha_2=-5\end{matrix}\right\}\Rightarrow\ \begin{matrix}6\alpha\ /\ +15\alpha_2=18\\6\ /\ \alpha+2\alpha_2=-10\end{matrix}\Rightarrow$$

$$=12\alpha_2=38\Rightarrow\alpha_2=\frac{28}{13}$$

$$\begin{matrix}2\alpha_1+5\ /\alpha_2=6\\15\alpha_1+5/\ \alpha_2=-25\end{matrix}\Rightarrow\quad\begin{matrix}2\alpha_1+5\alpha_2=6\\3\alpha_1+\alpha_2=-5\end{matrix}$$

$$-13\alpha_1 = 31 \Rightarrow \alpha_1 = -\frac{39}{13}$$

به شما گفته میتوانیم که وکتور $U = (6.5)$ به قسم ترکیب خطی وکتور های U_2, U_1 ارایه شده است.

$$(6,-5) = -\frac{31}{13}(2,3) + \frac{28}{13}(5,1)$$

استقلال خطی و ارتباط خطی

هر گاه $x_1, x_2, \cdots, x_n$ ست وکتورها بوده و $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ سکالر ها باشند درینصورت اگر $\alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + ... = \alpha_n = 0$ باشد از اینجا نتیجه میشود که $\alpha_1 = \alpha_2 = ... = \alpha_n = 0$ است، گویند که وکتور های داده شده خطاً مستقل (استقلال خطی) اند مثلاً اگر $U = \{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\}$ ست فرعی $\mathbb{R}^3$ در این صورت ترکیب خطی آنرا تشکیل مساوی به صفر است.

$$\alpha_1(1,0,0) + \alpha_2(0,1,0) + \alpha_3(0,0,1) = (0,0,0)$$

و از اینجا داریم $(\alpha_1,0,0) + (0,\alpha_2,0) + (0,0,\alpha_3) = (0,0,0)$

و یا $(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3) = (0,0,0)$ در نتیجه

$$\alpha_1 = 0 \Lambda \alpha_2 = 0 \Lambda \alpha_3 = 0$$

بنابر این ست وکتور های در ده شده خط مستقل است.

و اگر $\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 \cdots \alpha_n x_n = 0$ بوده و اقلاً یکی از $\alpha_i(\exists \alpha_1 \neq 0 v \cdots v \exists \alpha_n \neq 0)$ خلاف صفر باشد در اینصورت گویند که ست وکتور های $x_1, x_2, ..., x_n$ مربوط (ارتباط خطی) اند.

طور مثال) ست وکتور های $a_1 = (1,2,0)$ خطاً $a_2(0,3,1)$ و $a_3(2,3,1)$ را درنظر میگریم باز هم ترکیب خطی انها را تشکیل و مساوی به صفر قرار می دهیم

$$\alpha_1(1,2,0) + \alpha_2(0,3,1) + \alpha_3(2,3,1) = (0,0,0)$$
$$(\alpha_1, 2\alpha_1, 0) + (0, 3\alpha_2, \alpha_2) + (2\alpha_3, 3\alpha_3, \alpha_3) = (0,0,0)$$
$$(\alpha_1 + 2\alpha_3, 2\alpha_1 + 3\alpha_2 + 3\alpha_3, \alpha_2 + \alpha_3) = (0,0,0)$$

$$\begin{matrix} \alpha_1 + 2\alpha_3 = 0 & & \alpha_1 = 2\alpha_3 \\ 2\alpha_1 + 3\alpha_3 + 3\alpha_3 = 0 & \Rightarrow & \alpha_2 = \alpha_3 \\ \alpha_2 + \alpha_3 \alpha_2 0 & & \end{matrix}$$

حالا به α_3 قیمت مختلف داده برای α_2, α_1 قمیت های مختلف را می یابیم.

$\alpha_3 = 0 \Rightarrow \alpha_1 = 0 \Lambda \alpha_2 = 0$

$\alpha_3 = 1 \Rightarrow \alpha_1 = 1 \wedge \alpha_2 = 1$

$\alpha_3 = -1 \quad \alpha_1 = -1 \quad \alpha_2 = 1$

بنابرین ترکیب های خطی ذیل را بدست مر گیریم.

$$0.(1,2,0) + 0(0,3,1) + 0.(2,3,1) = (0,0,0)$$

$$1(1,2,0) + (+1)(0,3,1) + (-1)(2,3,1) = (0,0,0)$$

$$(-1(1,2,0) + (-1)(0,3,1) + 1 \cdot (2,3,1)) = (0,0,0)$$

بنابرین ست وکتورهای داده شده خطاً مربوط اند.

تمرین) نشان دهید که

$\overrightarrow{U_1} x \overrightarrow{U_2} = -U_2 x U_1$ (i

$\overrightarrow{U_1} x \overrightarrow{U_2} = 0$ (ii

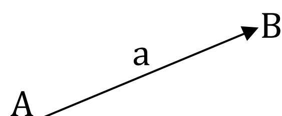
$U_1 x \left(\overrightarrow{U_2} + \overrightarrow{U}_3\right) = \overrightarrow{U_1} x U_2 + U_1 x U_3$ (iii

$\overrightarrow{U_1} x \left(k\overrightarrow{U_2}\right) = \left(k\overrightarrow{U_1}\right) x \overrightarrow{U}_2 = k\left(\overrightarrow{U_1} x \overrightarrow{U_2}\right)$ (iiii

لکچر سیزدهم

وکتورها Vectors

تعریف: خط مستقیم جهت داررا وکتور گویند مثلاً قوه، سرعت، تعجیل وغیره. معمولاً اگر خط مستقیم از نقطه A به طرف نقطه B موجه باشد درینصورت انرا به شکل $\overrightarrow{AB}$ نشان می دهند نقطه A را مبدا و طول AB را مقدار وکتور گویند.



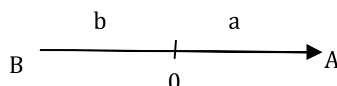
و معمولاً انرا به $\vec{a}$ نشان داده و طول a را به شکل $|\vec{a}|$ نشان می دهند. اگر مبدأ وکتور a در مبدا سیستم مختصات قایم قرار داشته باشد بنام شعاع ویکتور $\vec{a}$ یاد می شود.

وکتورهای مساوی: دو وکتور a و b مساوی اند هر گاه طول شان مساوی بوده $\left(|\vec{a}|=|\vec{b}|\right)$ و جهت های شان عین شی باشد.

وکتور صفری: هر گاه طول وکتور a مساوی به صفر باشد انرا ویکتور صفری می گویند یعنی $\vec{a}=0$

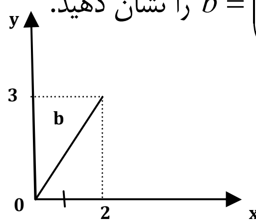
وکتورهای متضاد: دو وکتور a و b متضاد همدیگر گویند هر گاه طول شان از نظر قیمت مطلقه مساوی و جهت های مخالف یکدیگر باشد.

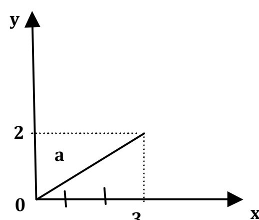
قرار شکل $\overrightarrow{0A}=a$ و $\overrightarrow{0B}=b=-a$



ارائه یک وکتور در سیستم مختصات قایم: یک وکتور در سیستم مختصات قایم بصورت افقی به شکل $\vec{a}=(a_x,a_y)$ و بصورت عمودی به شکل $\vec{a}=\begin{pmatrix}a_x\\a_y\end{pmatrix}$ نشانی داده می شود که درینجا a_x فاصله وکتور $\vec{a}$ بروی محور x و a_y ترتیب وکتور $\vec{a}$ بروی محور y می باشد.

مثال: در سیستم مختصات قایم وکتور $\vec{a}=\begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix}$ و $\vec{b}=\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}$ را نشان دهید.





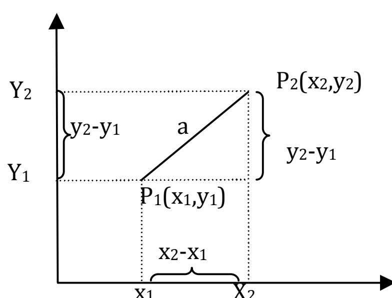
مسافه بین دو نقطه: هر گاه $P_1(x_1,y_1)$ و $P_2(x_2,y_2)$ دو نقطه باشند میخواهیم مسافه بین این دو نقطه را بدست آریم.

برای این هدف از هندسه تحلیلی می دانیم که اگر مسافه بین P1 و P2 را به d نشان دهم فورمول برای دریافت d عبارت است از:

$$d=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$$

و اگر بصورت وکتوری ارائه نمایم چنین خواهد شد:

$\vec{a}=(a_x,a_y)=(x_2-x_1,y_2-y_1)$



از شکل به اسانی دیده می شود که:

$$\left|\vec{a}\right|=\sqrt{a_x^2+a_y^2}$$
$$=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$$

و نقطهٔ تنصیف آن عبارت است از:

$$M=(x_m-y_m)=(\frac{x_1+x_2}{2},\frac{y_1+y_2}{2})$$

مثال: مسافه بین دو نقطه $P_1(2,4)$ و $P_2(3,6)$ دریافت نمائید.

$$|\overline{P_1P_2}|=\sqrt{a_x^2+b_y^2}=\sqrt{(3-2)^2+(6-4)^2}$$
$$=\sqrt{1^2+2^2}=\sqrt{1+4}=\sqrt{5}$$

و نقطهٔ تنصیف آن عبارت است از:

$$M=(x_m-y_m)=(\frac{x_1+x_2}{2},\frac{y_1+y_2}{2})$$
$$=(\frac{3+2}{2},\frac{4+6}{2})=(\frac{5}{2},\frac{10}{2})=(2.5,5)$$

جمع وکتور ها: فرض می نمایم که $u_1=(x_1, y_1)$ و $u_2=(x_2, y_2)$ با شند جمع این وکتور ها را این طور تعریف می دارند.

$$U_1+u_2=(x_1, y_1)+ (x_2, y_2)= (x_1+ x_2, y_1+ y_2).....I$$

و ضرب یک و کتور را در یک سکالر چنین تعریف می دارند.

فرض می نمایم که $u=(x, y)$ یک وکتور در مستوی بوده و $\alpha \in \mathbb{R}$ باشد درینصورت:

$$\alpha u = \alpha(x, y) = (\alpha x, \alpha y)......II$$

از روابط I و II نتیجه می گیریم، ست تمام وکتورها در مستوی که خاصیت I و II را صدق نماید بنام فضای مستوی یا فضای $\mathbb{R}^2$ نامیده می شود. باید متذکر شد که اگر وکتورها به شکل ستونی ارائه شود هم عین خاصیت را صدق می نماید بنا برین فضای $\mathbb{R}^2$ را چنین می نویسیم:

$$\mathbb{R}^2 = \mathbb{R}\times\mathbb{R} = \{(x, y) / x, y \in \mathbb{R}\}$$

$$\mathbb{R}^2 = \mathbb{R}\times\mathbb{R} = \left\{\begin{pmatrix} y \\ x \end{pmatrix} / x, y \in \mathbb{R}\right\}$$

هر گاه $\vec{i} = (1, 0)$ و $\vec{j} = (0,1)$ باشد این دو وکتور در حقیقت واحد وکتورهای اند که اولی روی محور x و دوهم روی محور y قرار دارند پس برای هر وکتور اختیاری $u = (x, y)$ میتوان نوشت:

$$u = (x, y) = (x, 0) + (0, y) = x(1, 0) + y(0, 1)$$
$$= x\vec{i} + y\vec{j}$$

وکتور واحد عبار از وکتور های اند که طول آن یک واحد طول باشد. اگر واحد وکتور را به e نشانی دهیم برای $e_1=(1, 0)$ داریم:

$$|e_1| = \sqrt{e_x^2 + e_y^2} = \sqrt{1^2 + 0^2} = \sqrt{1} = 1$$

و برای $e_2=(0,1)$ خواهیم داشت:

$$|e_2| = \sqrt{e_x^2 + e_y^2} = \sqrt{0^2 + 1^2} = \sqrt{1} = 1$$

مثال (i) وکتور های $u_1=(3,5)$ و $u_2=(-2,1)$ داده شده اند محاسبه نمائد:

1- حاصل جمعه وکتور های u_1 و u_2
2- $2u_1+3u_2$
3- u_1-u_1
4- طول وکتور u_1 و u_2 را بدست اورید:

حل:

1) $u_1 + u_2 = (3,5) + (-2,1) = (3-2, 5+1) = (1,6)$

2) $2u_1 + 3u_2 = 2(3,5) + 3(-2,1) = (6,10) + (-6,3) =$

$= (6 + (-6), 10 + 3)$

3) $u_1 - u_2 = (3,5) - (3,5) = (3-3, 5-5) = (0,0)$

4) $|u_1| = |(3,5)| = \sqrt{3^2 + 5^2} = \sqrt{9+25} = \sqrt{34}$

$|u_2| = |(-2,1)| = \sqrt{(-2)^2 + 1^2} = \sqrt{4+1} = \sqrt{5}$

***ii*)** u_1 و u_2 جز i)- ام را در نظر گرفته انرا به شکل $x\vec{i} + y\vec{j}$ در آورید.

$$\begin{aligned} u_1 + u_2 &= (3,5) + (-2,1) = [(3,0) + (0,5)] + [(-2,0) + (0,1)] = \\ &= [3(1,0) + 5(0,1)] + [-2(1,0) + (0,1)] = \\ &= (3 + 1 - 2) + (1,0) + (5,1) + (0,1) = \\ &= 1(1,0) + 6(0,1) = x.\vec{i} + 6.j \end{aligned}$$

خواص وکتور ها در $\mathbb{R}^2$

1)جمع وکتور ها در $\mathbb{R}^2$اتحاد است یعنی اگر $u_1 = (x_1, y_1)$ ، $u_2 = (x_2, y_2)$ و $u_3 = (x_3, y_3)$ باشند پس:

$$u_1 + (u_2 + u_3) = (u_1 + u_2) + u_3$$

به این ترتیب:

$$\begin{aligned} u_1 + (u_2 + u_3) &= (x_1, y_1) + [(x_2, y_2) + (x_3, y_3)] = \\ &= (x_1 + y_1) + (x_2 + x_3) + (y_2 + y_3) = \\ &= (x_1 + (x_2 + x_3), y_1 + (y_2 + y_3)) = \\ &= (x_1 + x_2 + x_3, y_1 + y_2 + y_3) \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots I \\ (u_1 + u_2) + u_3 &= [(x_1, y_1) + (x_2, y_2)] + (x_3, y_3) = \\ &= (x_1 + x_2, y_1 + y_2) + (x_3, y_3) = \\ &= ((x_1 + x_2) + x_3, (y_1 + y_2) + y_3) = \\ &= (x_1 + x_2 + x_3,\ y_1 + y_2 + y_3) \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots II \end{aligned}$$

از I و II نتیجه می شود که:

$$u_1+(u_2+u_3)=(u_1+u_2)+u_3$$

2) عملیه جمع در $\mathbb{R}^2$ تبادلوی است. هر گاه $u_1=(x_1,y_1)$ و $u_2=(x_2,y_2)$ باشد درینصورت $u_1+u_2=u_2+u_1$ است زیرا:

$$u_1+u_2=(x_1,y_1)+(x_2,y_2)=\left(x_1+x_2,y_1+y_2\right)$$
$$u_2+u_1=(x_2,y_2)+(x_1,y_1)+(x_2+x_1,\ y_2+y_1)=$$
$$=\left(x_1+x_2\,,\ y_1+y_2\right)$$

3) ضرب سکالر در جمع وکتوری خاصیت توزیعی را صدق می نماید به این ترتیب:

$$\alpha(u_1+u_2)=\alpha(x_1,y_1)+(x_2,y_2)=\alpha\left(x_1+x_2\,,\ y_1+y_2\right)=$$
$$=\left(\alpha(x_1,x_2),\ \alpha(y_1,y_2)\right)=$$
$$=\left(\alpha x_1+\alpha x_2,\ \alpha y_1,\alpha y_2\right)$$
$$=(\alpha x_1,\alpha y_1)+(\alpha x_2,\alpha y_2)$$
$$=\alpha(x_1,y_1)+\alpha(x_2,y_2)$$
$$=\alpha u_1+\alpha u_2$$

4) ضرب وکتور در حاصل جمع سکالرها نیز خاصیت توزیعی را صدق می نماید.

$$(\alpha+\beta)u=(\alpha+\beta)(x,y)=\left((\alpha+\beta)x,\ (\alpha+\beta)y\right)$$
$$=(\alpha x+\beta x,\ \alpha y+\beta y)=(\alpha x,\ \alpha y)+(\beta x,\beta y)$$
$$=\alpha(x,y)+\beta(x,y)$$

مثال ها

i) دو وکتور $u_1=(1,2)$ و $u_2=(-3,4)$ را در نظر گرفته خاصیت تبادلوی جمع را بالای آن تطبیق نماید:

حل:

$$u_1+u_2=(-3,\ 4)+(1,\ 2)=(-3+1,\ 4+2)=(-2,\ 6)$$
$$u_2+u_1=(1,\ 2)+(-3,\ 4)=(1-3,\ 2+4)=(-2,\ 6)$$

ii) دو وکتور جز i) و وکتور $u_3\,(-5,2)$ را در نظر گرفته خاصیت اتحادی را بالای آن تطبیق نمائد:

$$u_1+(u_2+u_3)=(1,\ 2)+\left((-3,\ 4)+(-5,\ 2)\right)=$$
$$=(1,\ 2)+\left(-3+(-5),\ 4+2\right)=$$
$$=(1,\ 2)+(-8,6)=(1-8,\ 2+6)=(-7,\ 8)$$

$$(u_1+u_2)+u_3=\left((1,\ 2)+(-3,\ 4)\right)+(-5,\ 2)=(1-3,\ 2+4)+(-5,\ 2)=$$
$$=(-2,\ 6)+(-5,\ 2)=(-2+(-5),\ 6+2)=$$
$$=(-7,\ 8)$$

iii) دو وکتور جز i) و $\alpha = 1/2$ را در نظر گرفته خاصیت توزیعی را بالای آن تطبیق نماید:

$$\alpha.(u_1 + u_2) = [(1, 2) + (-3, 4)] = (1 + (-3), 2 + 4))$$
$$= 1/2(1 + (-3), 2 + 4)) = 1/2(-2, 6) = (-1, 3)$$
$$\alpha u_1 + \alpha u_2 = 1/2(1, 2) + 1/2(-3, 4) = (1/2 + 1) + -3/1, 2) =$$
$$= (1/2 + (-3/1)), 1 + 2) = (-1, 3)$$

iv) $\alpha = 1/5$ و $\beta = 4$ و وکتور جز ii) را در نظر گرفته خاصیت توزیعی را بالای آن تطبیق نماید:

$$(\alpha + \beta)u = (1/5 + 4)(-5, 2) = {}^{21}\!/_{5}.(-5, 2) = (-21, {}^{43}\!/_{5})$$
$$\alpha u + \beta u = {}^{1}\!/_{5}(-5, 2) + 4(-5, 2) = (-1, {}^{2}\!/_{5}) + (-20, 8) =$$
$$= (-1 + (-20), {}^{2}\!/_{5} + 8) = (-21, {}^{42}\!/_{5})$$

تمرین

i) مسافه بین دو نقطه $(3, 4)$ و $(2, 7)$ را دریافت نمائد؟

ii) نقطه وسطی این دو نقطه را تعین نماید؟

iii) طول وکتور $u = (3, 4)$ را محاسبه نماید؟

iv) جمع وکتورهای $u = (3, 4)$ و $v = (2, 7)$ را به شکل $x\vec{i} + y\vec{j}$ بنویسید؟

لکچر چهاردهم

وکتورها در فضاء

درینجا وقتیکه ما نام از فضا می بریم هدف ما فضای است که دران زندگی می نمایم قبلاً خوانده ایم که خط موجه نمایش فضای یک بعدی را می دهد یعنی هر نقطه آن یک عدد را ارائه می دارد و این درحقیقت محور اعداد یعنی $\mathbb{R}$ را نشان می دهد اما مستوی فضا است که دو بعد دارد طوریکه هر نقطه آن به دو عدد تقابل می نماید یکی روی محور فاصله و دیگری روی محور ترتیب.

بدین ترتیب فضای مورد بحث ما سه بعد را ارائه می دارد یکی فاصله $(Destance)$ ، دیگری ترتیب $(ordinate)$ و سوم $Applacate$ می باشد پس $\mathbb{R}^3$ مجموعه تمام وکتورهای است که فضای $\mathbb{R}^3$ را بوجود میاورد.

$$\mathbb{R}^3 = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \{(x, y, z) : x, y, z \in \mathbb{R}\}$$

یعنی هر وکتور آن دارای سه مرکبه است که مرکبه اول مربوط به محور x (جهت این محور به طرف بیننده بوده) مرکبه دوم مربوط به محور y (به طرف راست بیننده جهت دارد) و مرکبه سوم مربوط به محور Z (به طرف ساحه دید بیننده جهت دارد) به این ترتیب این سه محور سیستم مختصات قایم را درفضا بوجود می اورد. این محور ها عموماً دریک نقطه متلاقی اند که نقطه تقاطع آن مبدا سیستم مختصات قایم در فضا می باشد.

انتخاب یک نقطه در سیستم مختصات قایم در فضا:

می دانیم که از تشکیل سیستم مختصات قایم در فضا سه مستوی بوجود می آید مستوی xy، مستوی yz و مستوی xz است. بنابرین در سیستم مختصات قایم تعین یک نقطه طورذیل صورت می گیرد.

اول موقعیت نقطه را در مستوی xy تعین، بعداً در مستوی xy به اندازه z داده شده یک عمود را رسم می نمایم، انجام z در حقیقت موقعیت نقطه داده شده در سیستم مختصات قایم در فضا می باشد.

طوریکه در $\mathbb{R}^2$ گفته شده درسیستم مختصات قایم در فضا یعنی $\mathbb{R}^3$ مانند $\mathbb{R}^2$ جمع دو وکتور و ضرب یک وکتور در سکالر صورت می گیرد به این ترتیب اگر $u_1 = (x_1, y_1, z_1)$ و $u_2 = (x_2, y_2, z_2)$ و $\alpha \in \mathbb{R}$ باشد پس

$$u_1 + u_2 = (x_1, y_1, z_1) + (x_2, y_2 z_2) =$$
$$= (x_1 + x_2, y_1 + y_2, z_1 + z_2)$$
$$\alpha(x, y, z) = (\alpha x, \alpha y, \alpha z)$$

می باشد.

مثال i. هرگاه $u_1 = (2, -3, 1)$ و $u_2 = (-3, 4, 2)$ باشد پس

$$u_1+u_2=(2,-3,1)+(-3,4,2)=(2+(-3),(-3)+4,1+2)=$$
$$=(-1,1,3)$$

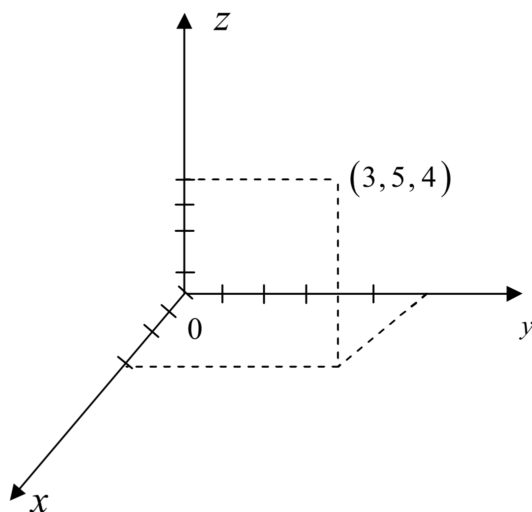
ii. هرگاه $a=\frac{3}{2}$ باشد.

$$\frac{3}{2}u_1=\frac{3}{2}(2,-3,1)=\left(3,-\frac{9}{2},\frac{3}{2}\right)$$

iii. $3u_1-2u_2$ را بدست می اوریم

$$3u_1-2u_2=3(2,-3,1)-2(-3,4,2)=$$
$$=(6,-9,3)-(-6,+8,4)=$$
$$=(6,-9,3)+(6,-8,-4)=$$
$$=(12,-17,-1)$$

iv. موقعیت نقطه $(3,5,4)$ را درسیستم مختصات قایم نشان دهید.



یادداشت: در حالت منفی بودن یکی از مرکبه ها باید طرف منفی محورات مختصات در نظر گرفته شود.

مشابه به $\mathbb{R}^2$ در $\mathbb{R}^3$ نیز وکتور های واحد در نظر گرفته می شود که اگر e_1 , e_2 و e_3 وکتورهای واحد به ترتیب روی محورات x , y و z باشد درینصورت چنین خواهد شد.

$$\vec{i}=(1,0,0)\ ,\ \vec{g}=(0,1,0)\ ,\ \vec{k}=(0,0,1)$$

که درین حالت طول هرکدام آن هر وکتور $\left|\vec{i}\right|=\left|\vec{g}\right|=\left|\vec{k}\right|=1$ می باشد.

میتوان هر وکتور اختیاری $\mathbb{R}^3$ را به شکل حاصل جمع وکتور های فوق ارائه نمود. فرض مـــــی نمـــــایم کــــه $u=(x,y,z)$ باشد درینصورت میتوان نوشت

$$u=(x,y,z)=(x,0,0)+(0,y,0)+(0,0,z)=$$
$$=x(1,0,0)+y(0,1,0)+z(0,01)=$$
$$=x\vec{i}+y\vec{g}+z\vec{k}$$

مسافه بین دو نقطه در فضا:

فرض می نمایم که $P_1=(x_1,y_1,z_1)$ و $P_2=(x_2,y_2,z_2)$ دو نقطه در سیستم مختصات قایم در فضا یوده و OP_1 و OP_2 شعاع وکتورهای این نقاط باشند درینصورت از جمع وکتورها میتوان نوشت.

$$\overrightarrow{OP_1}+\overrightarrow{P_1P_2}=\overrightarrow{OP_2}$$

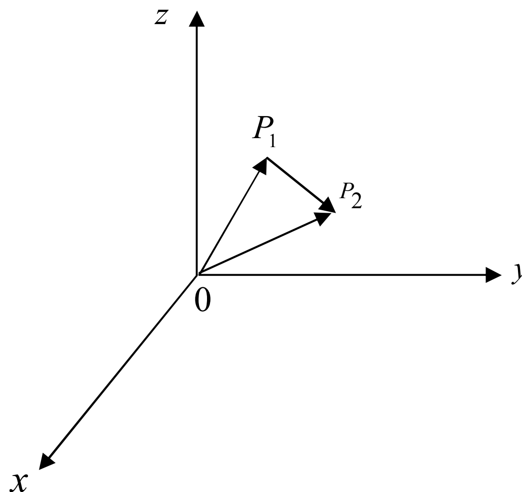
یا

$$\overrightarrow{P_1P_2}=\overrightarrow{OP_2}-\overrightarrow{OP_1}$$

چون $\overrightarrow{OP_2}=x_1$ و $\overrightarrow{OP_1}=x_1$ است پس

$$\overrightarrow{P_1P_2}=(x_2-x_1,y_2-y_1,z_2-z_1)$$

است پس برای دریافت مسافه بین نقاط P_1 و P_2 داریم.



$$|P_1P_2|=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}$$

هرگاه نقطه P_1 روی مبدا قرار داشته باشد درینصورت $P_1(x_1,y_1,z_1)=(0,0,0)$ شده، داریم

$$|P_1P_2| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

مثال $i)$: هرگاه $Q = (-3, 4, 6)$ باشد درینصورت طول شعاع ویکتور آنرا دریافت نمایید

$$|a| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = \sqrt{(-3)^2 + 4^2 + 6^2} = \sqrt{9 + 16 + 36} = \sqrt{25 + 36} = \sqrt{61}$$

$ii)$ هرگاه $u_1 = 4\vec{i} + 3\vec{i} + 2\vec{i}$ ، $u_2 = 5\vec{i} + 6\vec{i} + 3\vec{i}$ و $u_3 = 6\vec{i} + 5\vec{i} + 4\vec{i}$ باشد درینصورت $|\overrightarrow{u_1} - \overrightarrow{u_2} - \overrightarrow{u_3}|$ و $u_1 + 2u_2$ را محاسبه نمایید

$$u_1 + 2u_2 = 4\vec{i} + 3\vec{i} + 2(5\vec{i} + 6\vec{j} + 3\vec{k}) =$$

$$= 4\vec{i} + 3\vec{j} + 2\vec{k} + 10\vec{i} + 12\vec{j} + 6\vec{k} =$$

$$= 14\vec{i} + 15\vec{j} + 8\vec{k}$$

$$|u_1 - u_2 - u_3| = |4\vec{i} + 3\vec{j} + 2\vec{j} - (5\vec{i} + 6\vec{j} + 3\vec{k}) - 16\vec{i} - 5\vec{j} - 4\vec{k}|$$

$$= |4\vec{i} + 3\vec{j} + 2\vec{k} - 5\vec{i} - 6\vec{j} - 3\vec{k} - 6\vec{i} + 5\vec{j} + 4\vec{k}|$$

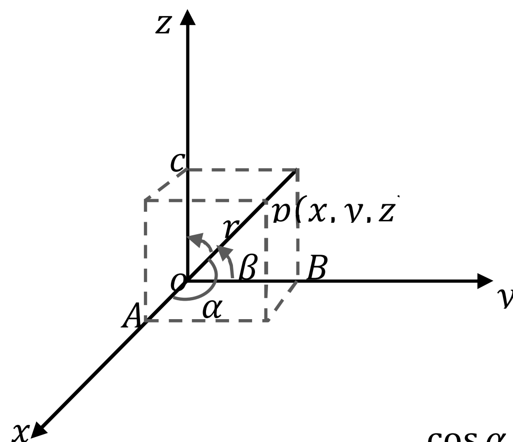
$$= |-7\vec{i} + 2\vec{j} + 3\vec{k}| =$$

$$= \sqrt{(-7)^2 + 2^2 + 3^2} = \sqrt{49 + 4 + 9} =$$

$$= \sqrt{62}$$

زوایا و کوساین های جهت یک ویکتور

فرض می نماییم که r شعاع ویکتور نقطه P بوده و به ترتیب با محور x زاویه α ، با محور y زاویه β و با محور z زاویه γ را میسازد به این ترتیب داریم



$$\overrightarrow{OP} = r$$

$$\overrightarrow{OA} = r$$

$$\overrightarrow{OB} = r_y$$

$$\overrightarrow{OC} = r_z$$

میتوان کوساین های جهت شعاع ویکتور r را طور ذیل بنویسیم

$$\cos\alpha = \frac{x}{r} \Longrightarrow x = rcos\alpha$$

$$\cos\beta = \frac{y}{r} \Longrightarrow y = rcos\beta$$

$$cosr = \frac{z}{r} \Longrightarrow z = rcosr$$

اگر اطراف روابط بالا را مربع سازیم چنین خواهد:

$$x^2 = r^2cos^2\alpha$$
$$y^2 = r^2cos\beta^2$$
$$z^2 = r^2cos^2r$$

روابط اخیر را طرف به طرف جمع نموده داریم:

$$x^2 + y^2 + z^2 = r^2cos^2\alpha + r^2cos^2\beta + r^2cos^2r$$
$$= r^2(cos^2\alpha + cos^2\beta + cos^2r)$$

و بنابرین میتوان نوشت

$$cos^2\alpha + cos^2\beta + cos^2r = \frac{x^2}{r^2} + \frac{y^2}{r^2} + \frac{z^2}{r^2}$$
$$= \frac{x^2+y^2+z^2}{r^2}$$

چون $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$ است، پس داریم

$$cos^2\alpha + cos^2\beta + cos^2r = \frac{r^2}{r^2} = 1$$

و این یک رابطه اساسی کوساین های جهت یک ویکتور در فضای سه بعدی است. البته α، γ ، β زوایای جهت اند.

مثال: زاویه α را بدست آورید که طول x ویکتور $\alpha\vec{i} + (\alpha + 1)j + 2\vec{k}$ مساوی به 3 واحد شود.

حل: هرگاه $u = \alpha\vec{i} + (\alpha + 1)\vec{j} + 2\vec{k}$ باشد پس

$$|u| = \left|\alpha\vec{i} + (\alpha + 1)\vec{j} + 2\vec{k}\right|$$
$$= \sqrt{\alpha^2 + (\alpha + 1)^2 + 2^2} = \sqrt{\alpha^2 + \alpha^2 + 2\alpha + 1 + 4}$$
$$= \sqrt{2\alpha^2 + 2\alpha + 5} = 3$$

و از اینجا

$$2\alpha^2 + 2\alpha + 5 = 3$$
$$2\alpha^2 + 2\alpha - 4 = 9$$
$$2\alpha^2 + \alpha - 2 = 0$$
$$\Delta = 1 - 4(-2) = 1 + 8 = 9$$
$$\alpha_1 = \frac{-1+3}{2}\frac{2}{2} = 1 \qquad \alpha_2 = \frac{-1\pm3}{2} = \frac{-4}{2} = -2$$

امتحان:

$$|u| = \sqrt{(-2)^2 + (2+1)^2 + 2^2} = \sqrt{4+9+4} = \sqrt{17} \neq 3$$

$$|u| = \sqrt{1^2 + (1+1)^2 + 2^2} = \sqrt{4+9+4} = \sqrt{9} = 3$$

بنابرین برای $\alpha = 1$ طول ویکتور u می باشد.

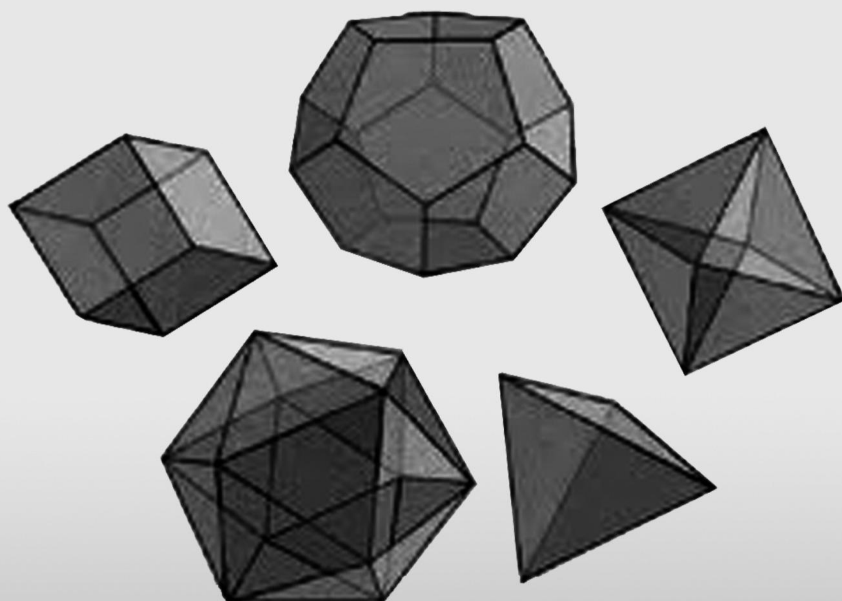
تمرین

هرگاه $u_1 = \vec{i} + 2\vec{j} - \vec{k}$ و $u_1 = 3\vec{i} - 2\vec{j} + 2\vec{k}$ و $u_3 = 5\vec{i} - \vec{j} + 3\vec{k}$ باشد درینصورت محاسبه نمایید

a) $u_1 + 2u_2 + u_3$

b) $u_2 - 3u_3$

c) $|3u_2 + u_3|$



ریاضی صنف دوازدهم

شامل دروس انتخابی صنف 12 نصاب جدید تعلیمی

لکچر اول

لیمت و تمادیت توابع

مفاهیم اولی لیمت تابع: تقرب متحول، مفهوم لیمت، تعریف لیمت (مثال های بسیط)، لیمت های راست و چپ لیمت (موجودیت لیمت)، مثال ها:

تقرب متحول: گفته میشود که متحول x به عدد معین a تقرب میکند، درصورتیکه x حسب د لخواه به a نزدیک شده بتواند، یعنی تفاوت بین x و a ازهرعدد کوچک $\delta > 0$ کوچکتر گردد. مفهوم فوق طور سمبولیک به عبارات معادل ذیل افاده میگردد:

$$|x-a| \to 0 \text{ یا } x \to a \text{ یا } \lim x = a \text{ یا } \forall \delta > 0 : |x-a| < \delta$$

تقرب متحول از راست $(x \to a^+)$: اگریک ترادف متناقص قیمت هـای xوجودداشته باشد طوریکه تدریجاً حسب دلخواه به a نزدیک شوند، چنانجه

$$x : a+0.1 \quad , \quad a+0.01 \quad , \quad a+0.001 \quad , \quad a+0.0001 \quad , \quad \cdots \quad \to a^+$$

تقرب متحول از چپ $(x \to a^-)$: درصورتیکه ترادف متزاید قیمت هـای x تعین شده بتواند طوریکه تدریجاً حسب دلخواه به a نزدیک شوند، چنانچه:

$$x : a-0.1 \quad , \quad a-0.01 \quad , \quad a-0.001 \quad , \quad a-0.0001 \quad , \quad \cdots \quad \to a^-$$

پس تقرب متحول x به عدد a معادل است به تقرب از دو سمـت (راست و از چپ) یعنی:

$$x \to a \quad \Leftrightarrow \quad (x \to a^+, x \to a^-)$$

مثال 1. متحول xرابه عدد 4 تقرب دهـید، بعبارت دیگرمفهـوم $x \to 4$راتوضبح کنید

حل:

$$\left.\begin{array}{l} x : 4.1 \quad , \quad 4.01 \quad , \quad 4.001 \quad , \quad 4.0001 \quad , \quad \ldots \quad \to 4^+ \\ x : 3.9 \quad , \quad 3.99 \quad , \quad 3.99 \quad , \quad 3.999 \quad , \quad \ldots \quad \to 4^- \end{array}\right\} \Leftrightarrow x \to 4$$

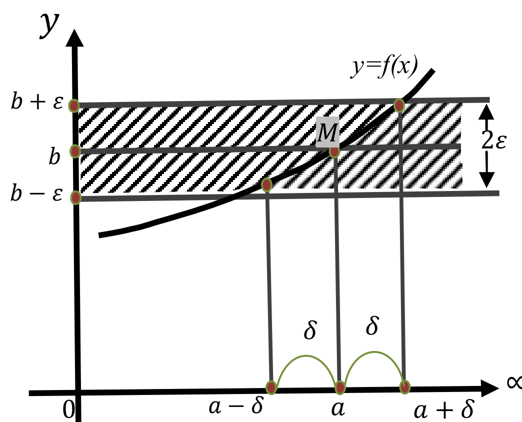
مفهوم لیمت: هرگاه تابع $f(x)$در یک انتروال بازکه عدد a شامل آنست، تعریف شده باشد (ولوکه در a غیرقابل تعریف باشد) و باتقرب متحول x به a، $f(x)$ حسب دلخواه به عدد l نزدیک شود ، گفته میشود که لیمت تابع $f(x)$ عبارت از l ا ست، زمانی که x به aتقرب می نماید ومینویسند که:

$$\lim_{x \to a} f(x) = l \quad \text{یا} \quad f(x) \to l \Leftrightarrow x \to a$$

عبارت فوق الذکر رابه بیان های متفاوت توپولوژیکی تعریف وتوضیح مینمایند:

تعریف لیمت: لیمت تابع $f(x)$ مساوی به عدد lاست زمانی که x به a تقرب نماید اگر برای هر عدد مثبت ε یک عدد مثبت δ وجود داشته باشد طوریکه از نامساوات $|f(x)-l|<\varepsilon$ نامساوات $|x-a|<\delta$ به دست آید و مینویسیم که $\lim_{x\to a} f(x)=l$. این تعریف به یکی از سه عبارت سمبولیک ذیل افاده می شود:

$$\lim_{x\to a} f(x)=l \Leftrightarrow \begin{pmatrix} \forall\varepsilon>0\ \exists\delta>0: \\ 0<|x-a|<\delta \Rightarrow |f(x)-l|<\varepsilon \end{pmatrix}$$



لیمت سمت راست: $\lim_{x\to a^+} f(x)=l_1$

لیمت سمت چپ: $\lim_{x\to a^-} f(x)=l_2$

تابع $f(x)$وقتیکه $x\to a$دارای لیمتl می باشد یعنی $\lim_{x\to a} f(x)=l$ بشرطیکه:

$$\lim_{x\to a^-} f(x) \quad = \quad l \quad = \quad \lim_{x\to a^+} f(x)$$

بنا برین درصورتیکه لیمت های راست وچپ یک تابع مساوی نباشند تابع دارای لیمت نیست.

مثال2: برای $f(x)=\frac{x^2-9}{x-3}$ نشان دهید که $\lim_{x\to 3} f(x)=6$.

حل: لیمت های راست وچپ را مطالعه می کنیم:

x	3.5	3.1	3.01	3.001	$\to 3^+$
$f(x)$	6.5	6.1	6.01	6.001	$\to 6$

$$\Rightarrow \lim_{x\to 3^+} f(x)=6$$

و

x	2.5	2.9	2.99	2.999	$\to 3^-$
$f(x)$	5.5	5.9	5.99	5.999	$\to 6$

$$\Rightarrow \lim_{x\to 3^-} f(x) = 6$$

دیده میشود که لیمت های سمت راست و چپ مساوی اند، یعنی

$$\Rightarrow \lim_{x\to 3^-} f(x) \;=\; 6 \;=\; \lim_{x\to 3^-} f(x)$$

بنابرین

$$\lim_{x\to 3} f(x) = \lim_{x\to 3} \frac{x^2-9}{x-3} = 6$$

مثال3. عدم موجودیت $\lim_{x\to 2} \frac{|x-2|}{x-2}$ را ثبوت کنید.

حل: بازهم لیمت های راست وچپ تابع $g(x) = \frac{|x-2|}{x-2}$ را محاسبه میکنیم:

x	2.5	2.1	2.01	2.001	$\to 2^+$
$g(x)$	1	1	1	1	$\to 1$

$$\Rightarrow \lim_{x\to 2^+} g(x) = 1$$

بهمین قسم:

x	1.5	1.9	1.99	1.99	$\to 2^-$
$g(x)$	-1	-1	-1	-1	$\to -1$

$$\Rightarrow \lim_{x\to 2^-} g(x) = -1$$

می بینیم که $\lim_{x\to 3^+} g(x) = 1 \neq \lim_{x\to 3^-} g(x) = -1$، لهذا $\lim_{x\to 2} g(x)$ وجود ندارد.

مثال4: با استفاده از مفاهیم ε و δ نشان دهید که $\lim_{x\to 3}(4x+8) = 20$ است.

حل: برای عدد اختیاری $\varepsilon > 0$ قبول کنیم که $|(4x+8)-20| < \varepsilon$ باشد، عدد $\delta > 0$ راتعین میکنیم

$$|(4x+8)-20| < \varepsilon \Rightarrow |4x-12| < \varepsilon \Rightarrow 4|x-3| < \varepsilon \Rightarrow |x-3| < \tfrac{\varepsilon}{4}$$

لذابرای $\delta = \frac{\varepsilon}{4}$ داریم که:

$$|x-3| < \delta \Rightarrow |x-3| < \tfrac{\varepsilon}{4} \Rightarrow 4|x-3| < \varepsilon \Rightarrow |4x-12| < \varepsilon$$

$$\Rightarrow |4x+8-8-12| < \varepsilon \Rightarrow |(4x+8)-20| < \varepsilon \Rightarrow \lim_{x\to 3}(4x+8) = 20$$

لکچر دوم

خواص لیمت (قوانین لیمت)

توابع بینهایت کوچک، لیمت مجموع، حاصل ضرب و تقسیم توابع، حاصل تفریق و حالات $\frac{0}{0}$ و $\frac{\infty}{\infty}$ در توابع ناطق.

توابع بینهایت کوچک (بینهایت کوچک ها)

تابع $\varepsilon(x)$ در $x \to a$ بینهایت کوچک نامیده میشود، هرگاه $\lim\limits_{x \to a} \varepsilon(x) = 0$ باشد

1..برای اینکه $\lim\limits_{x \to a} f(x) = b$ باشد، لازم وکافیست که $f(x)$ بحیث مجموع عد د ثابت b وتابع بینهایت کوچک $\alpha(x)$ در $x \to a$ ارایه شده بتواند، یعنی:

$$\left.\begin{array}{l} f(x) = b + \varepsilon(x) \\ \lim\limits_{x \to a} \varepsilon(x) = 0 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \lim_{x \to a} f(x) = b$$

2. اگر $\varepsilon(x)$ در $x \to a$ بینهایت کوچکی باشد که صفر نگرددپس $\ell im_{x \to a} \frac{1}{\varepsilon(x)} = \infty$

3. مجموع توابع بینهایت کوچک، بازهـم یک تابع بینهایت کوچک است.

4. حاصل ضرب تابع بینهایت کوچک و تابع محدود یک تابع بینهایت کوچک می باشد

5. هرگاه $\varepsilon(x)$ بینهایت کوچک و $u(x)$ تابعی که لیمت آن صفر شده نتواندباشند، پس تابع $v(x) = \frac{\varepsilon(x)}{u(x)}$ یک بینهایت کوچک است.

مثال5:

I. تابع $\varepsilon(x) = x^2 - 9$ در $x \to 3$ بینهایت کوچک است زیرا که

$$\lim_{x \to 3} \varepsilon(x) = \lim_{x \to 3} (x^2 - 9) = 0$$

II . تابع $\varepsilon(x) = \frac{1}{2x}$ در $x \to \infty$ بینهایت کوچک می باشد:

$$\lim_{x \to \infty} \varepsilon(x) = \lim_{x \to \infty} \frac{1}{2x} = 0$$

یادداشت: درینجا توابع بینهایت کوچک به خاطر ثبوت خواص لیمت مطرح شده است.

خواص لیمت

لیمت تابع ثابت. هرگاه a و c دو عدد ثابت باشند، برای تابع ثابت $f(x) = c$ واضح است که $\lim\limits_{x \to a} f(x) = c$ است.

لیمت تابع خطی. اگر a، b و $m \neq 0$ اعداد ثابت باشند، برای تابع خطی $f(x) = mx + b$، عدد $\varepsilon > 0$ را در نظر می گیریم و

$$|f(x) - (ma+b)| < \varepsilon \Rightarrow |(mx+b) - (ma+b)| < \varepsilon$$
$$\Rightarrow |mx - ma| < \varepsilon \Rightarrow m|x-a| < \varepsilon \Rightarrow |x-a| < \tfrac{\varepsilon}{m}$$

بنابرین برای هر $\varepsilon > 0$ عدد $\delta = \frac{\varepsilon}{m}$ و جود دارد طوریکه

$$|x-a| < \delta \Rightarrow |f(x) - (ma+b)| < \varepsilon$$

لهذا

$$\lim_{x \to a} f(x) = ma + b$$

در نتیجه میتوانیم بنویسم که:

$$\lim_{x \to a} c = c \quad , \quad \lim_{x \to a}(mx+b) = ma + b$$

قواعد اساسی لیمت: هرگاه $\lim_{x \to a} f(x)$ و $\lim_{x \to a} g(x)$ وجود داشته باشند، پس

$$I. \quad \lim_{x \to a}[f(x) + g(x)] = \lim_{x \to a} f(x) + \lim_{x \to a} g(x)$$
$$II. \quad \lim_{x \to a}[f(x) g(x)] = \left[\lim_{x \to a} f(x)\right]\left[\lim_{x \to a} g(x)\right]$$
$$III. \quad \lim_{x \to a}\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \to a} f(x)}{\lim_{x \to a} g(x)} \quad , \quad \lim_{x \to a} g(x) \neq 0$$

ثبوت: فرض کنیم $\lim_{x \to a} f(x) = b_1$ و $\lim_{x \to a} g(x) = b_2$ باشد در این صورت توابع بینهایت کوچک ε_1و ε_2 در x→a وجود دارند طوریکه:

$$f(x) = b_1 + \varepsilon_1 \text{ و } g(x) = b_2 + \varepsilon_2$$

و اکنون داریم که

$$1. \quad f(x) + g(x) = (b_1 + \varepsilon_1) + (b_2 + \varepsilon_2) = (b_1 + b_2) + (\varepsilon_1 + \varepsilon_2)$$

چون $\varepsilon_1 + \varepsilon_2$ مجموع توابع بینهایت کوچک، یک تابع بینهایت کوچک است، لذا

$$\lim_{x \to a}\{f(x) + g(x)\} = b_1 + b_2 = \lim_{x \to a} f(x) + \lim_{x \to a} g(x)$$

$$2. \quad f(x) g(x) = (b_1 + \varepsilon_1)(b_2 + \varepsilon_1) = b_1 b_2 + v_2 \varepsilon_1 + b_1 \varepsilon_2 + \varepsilon_1 \varepsilon_2$$

دیده میشود که تابع $\varepsilon_1 b_2 + \varepsilon_2 b_1 + \varepsilon_1 \varepsilon_2$ بینهایت کوچک می باشد پس:

$$\lim_{x \to a}[f(x) g(x)] = b_1 b_2 = \lim_{x \to a} f(x) \lim_{x \to a} g(x)$$

$$3. \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\varepsilon_1 + b_1}{\varepsilon_2 + b_2} = \frac{b_1}{b_2} + \left(\frac{b_1 + \varepsilon_1}{b_2 + \varepsilon_2} - \frac{b_1}{b_2}\right) = \frac{b_1}{b_2} + \frac{\varepsilon_1 l_2 - \varepsilon_2 b_1}{b_2(b_2 + \varepsilon_2)}$$

واضحاً $\frac{\varepsilon_1 l_2 - \varepsilon_2 b_1}{b_2(b_2 + \varepsilon_2)}$ یک تابع بینهایت کوچک است لهذا:

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{\lim_{x \to a} f(x)}{\lim_{x \to a} g(x)}$$

لیمت حاصل ضرب تابع با عدد ثابت. برای تابع $f(x)$ و عدد ثابت c با در نظرداشت لیمت حاصل ضرب دو تابع داریم.

$$\lim_{x \to a} [cf(x)] = \left[\lim_{x \to a} c\right]\left[\lim_{x \to a} f(x)\right] = c \lim_{x \to a} f(x)$$

لیمت تفاضل توابع. اگر $\lim_{x \to a} f(x)$ و $\lim_{x \to a} g(x)$ وجود داشته باشند، با استفاده از لیمت مجموع توابع میتوانیم بنویسم که

$$\lim_{x \to a} [f(x) - g(x)] = \lim_{x \to a} [f(x) + (-1)g(x)]$$
$$= \lim_{x \to a} f(x) + \left[(-1)\lim_{x \to a} g(x)\right] = \lim_{x \to a} f(x) + \left[\lim_{x \to a} (-1)\right]\left[\lim_{x \to a} g(x)\right]$$
$$= \lim_{x \to a} f(x) + (-1)\left[\lim_{x \to a} g(x)\right] = \lim_{x \to a} f(x) - \lim_{x \to a} g(x)$$

بنابرین

4. $\lim_{x \to a} [cf(x)] = c \lim_{x \to a} f(x)$

5. $\lim_{x \to a} [f(x) - g(x)] = \lim_{x \to a} f(x) - \lim_{x \to a} g(x)$

لیمت تابع عینیت. برای عدد ثابت a و تابع عینیت $f(x) = x$ و لیمت تابع خطی مینوان نوشت

$$\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a} x = \lim_{x \to a} (1 \cdot x + 0) = 1 \cdot a + 0 = a$$

پس

$$\lim_{x \to a} x = a$$

لیمت توابع پولینومی. با در نظر داشت لیمت تابع طاقت میتوانیم بنویسیم که

$$\lim_{x \to a} x^n = \lim_{x \to a} \left(\underbrace{xxx \cdots x}_{n}\right) = \left(\lim_{x \to a} x\right)\left(\lim_{x \to a} x\right)\left(\lim_{x \to a} x\right) \cdots \left(\lim_{x \to a} x\right) = aaa \cdots a = a^n$$

حال میتوانیم لیمت هر پولینوم را محاسبه کنیم

$$\lim_{x \to a} \left[c_0 x^n + c_1 x^{n-1} + c_2 x^{n-2} + \cdots + c_n\right] = c_0 a^n + c_1 a^{n-1} + c_2 a^{n-2} + \cdots + c$$

بنابرین برای پولینوم $P(x)$ داریم که:

$$\lim_{x\to a} P(x) = P(a)$$

لیمت توابع ناطق. هرگاه $P(x)$ و $Q(x)$ پولینوم های باشند، طوریکه $Q(x)\neq 0$، پس

$$\lim_{x\to a}\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{\lim_{x\to a} P(x)}{\lim_{x\to a} Q(x)} = \frac{P(a)}{Q(a)}$$

بنابرین

$$\lim_{x\to a}\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{P(a)}{Q(a)}$$

لهذا لیمت توابع پولینومی و ناطق با قیمت های این توابع در عدد مربوط مساوی می باشند.

قضیهٔ ساندوویچ (ترتیب لیمت ها)

(1). فرض کنیم f و $g(x)$ توابعی باشند طوریکه $f(x)<g(x)$، با موجودیت لیمت ها داریم که $\lim_{x\to a} f(x) \le \lim_{x\to a} g(x)$، یعنی

$$f(x)<g(x) \Rightarrow \lim_{x\to a} f(x) \le \lim_{x\to a} g(x)$$

(2). هرگاه توابع $f(x)$، $g(x)$ و $h(x)$ برای هر x ازیک انتروال بازکه عدد a رادر برد ارد(ولوبرای $x\neq a$)، شرط $f(x)\le g(x)\le h(x)$ راصدق کند، در صورتیکه $\lim_{x\to a} f(x) = l = \lim_{x\to a} h(x)$ باشد، پس $\lim_{x\to a} g(x) = l$ است، یعنی

$$\left.\begin{array}{c} f(x)\le g(x)\le h(x) \\ \lim_{x\to a} f(x) = l = \lim_{x\to a} h(x) \end{array}\right\} \Rightarrow \lim_{x\to a} g(x) = l$$

مثال. توابع $f(x)=\frac{15x-4}{5x+6}$ و $g(x)=\frac{15x+4}{5x-6}$ را در نظر میگیریم واضح است که $f(x)<g(x)$ برای $x>1$ و اما

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty}\frac{15x-4}{5x+6} = \lim_{x\to\infty}\frac{15-\frac{4}{x}}{5+\frac{6}{x}} = \frac{15}{5} = 3$$

$$\lim_{x\to\infty} g(x) = \lim_{x\to\infty}\frac{15x+4}{5x-6} = \lim_{x\to\infty}\frac{15+\frac{4}{x}}{5-\frac{6}{x}} = \frac{15}{5} = 3$$

دیده میشود که $f(x)<g(x)$ بوده ولی $\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} g(x)$ است.

مثال. اگر $u(x)$ تابعی دارای خاصیت $1-\frac{x^2}{4}\le u(x)\le 1+\frac{x^2}{4}$ باشد، $\lim_{x\to 0} u(x)$ را معین کنید.

حل.واضح دیده می شود که

$$\lim_{x\to 0}(1-\tfrac{x^2}{4})=1=\lim_{x\to 0}(1+\tfrac{x^2}{4})$$

بنابرقضیه فوق $\lim_{x\to 0} u(x)=1$ است.

حالات مبهم لیمت توابع ناطق

اول حالت $\boxed{\frac{0}{0}}$: اگر حین محاسبهٔ $\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}$ توابع صورت و مخرج برای $x=a$ همزمان صفر شوند، یعنی $f(a)=0=g(a)$ درینصورت لیمت مذکور حالت$\frac{0}{0}$ را اختیار می نماید و صورت و مخرج دارای فکتور مشترک $x-a$ می باشد که بعضاً ممکن است مضاعف و یا چند دفعه ای باشد.، با اختصار این فکتور ابهام رفع شده و لیمت محاسبه می گردد.

$$1.\quad \lim_{x\to 3}\frac{x^2-9}{x-3}=\lim_{x\to 3}\frac{(x-3)(x+3)}{x-3}=\lim_{x\to 3}(x+3)=3+3=6$$

مثال ها <u>ص14</u>

$$1.\quad \lim_{x\to -2}\frac{x^2-4}{x+2}\overset{\frac{0}{0}}{=}\lim_{x\to -2}\frac{(x-2)(x+2)}{x+2}=\lim_{x\to -2}(x-2)=-2-2=4$$

$$2.\quad \lim_{x\to 2}\frac{x^2-6x+8}{x-2}\overset{\frac{0}{0}}{=}\lim_{x\to -2}\frac{(x-2)(x-4)}{x-2}=\lim_{x\to 2}(x-4)=2-4=-2$$

$$3.\quad \lim_{x\to 16}\frac{\sqrt{x}-4}{x-16}\overset{\frac{0}{0}}{=}\lim_{x\to 16}\frac{(\sqrt{x}-4)(\sqrt{x}+4)}{(x-16)(\sqrt{x}+4)}=\lim_{x\to 16}\frac{x-16}{(x-16)(\sqrt{x}+4)}$$

$$=\lim_{x\to 16}\frac{1}{\sqrt{x}+4}=\frac{1}{\sqrt{16}+4}=\frac{1}{8}$$

لیمت تابع ناطق در بینهایت: هرگاه پولینوم $P_m(x)$ دارای درجه m و $P_n(x)$ دارای درجه n باشد درینحالت جهت دریافت $\lim_{x\to\infty}\frac{P_m(x)}{P_n(x)}$، صورت ومخرج کسررا بر x^α طوریکه $\alpha=\max(m,n)$ تقسیم نموده میابیم که

$$\lim_{x\to\infty}\frac{P_m(x)}{P_n(x)}=\begin{cases} c & , \quad m=n \\ \pm\infty & , \quad m>n \\ 0 & , \quad m<n \end{cases}$$

درصورت $m=n$ عدد ثابت ، عبارت ازنسبت ضرایب آن حدودی از صورت و مخرج است که دارای بلند ترین توان باشند. حالت مشابه برای بعضی توابع نمایی نیز قابل تطبیق است (مثال12).

مثال های 1 تا4 (صفحات 15 - 17)

$$1.\ \lim_{x\to\infty}\frac{x^2-1}{3x^2-2}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{x^2-1}{x^2}}{\frac{3x^2-2}{x^2}}=\lim_{x\to\infty}\frac{1-\frac{1}{x^2}}{3-\frac{2}{x^2}}=\frac{1-0}{3-0}=\frac{1}{3}$$

$$2.\ \lim_{x\to\infty}\frac{x^2-2}{x+2}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{x^2-2}{x^2}}{\frac{x+2}{x^2}}=\lim_{x\to\infty}\frac{1-\frac{1}{x^2}}{\frac{1}{x}+\frac{2}{x^2}}=\infty$$

$$3.\ \lim_{x\to\infty}\frac{x-1}{x^2-2}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{x-1}{x^2}}{\frac{x^2-2}{x^2}}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}}{1-\frac{2}{x^2}}=0$$

سوم. حالت $\boxed{0\times\infty}$: ممکن است $\lim_{x\to a}[f(x)g(x)]$ حالت $0\times\infty$ را داشته باشد، درین حالت $f(x)g(x)=\frac{f(x)}{\frac{1}{g(x)}}$ شکل $\frac{0}{0}$ را اختیار می نماید.

مثال:

$$i.\ \lim_{x\to 5}\left[(x^2-25)\times\frac{1}{x-5}\right]\overset{0\times\infty}{=}\lim_{x\to 5}\frac{x^2-25}{x-5}\overset{\frac{0}{0}}{=}\lim_{x\to 5}\frac{(x-5)(x+5)}{x-5}=10$$

چهارم. حالت $\boxed{\infty-\infty}$: اگر $\lim_{x\to\infty}[f(x)-g(x)]$ شکل $\infty-\infty$ را داشته باشد، درینصورت $f(x)-g(x)=f(x)\left(1-\frac{g(x)}{f(x)}\right)$ به یکی از حالات $\frac{\infty}{\infty}$ و یا $0\times\infty$ تبدیل می گردد. در صورتیکه این حالت در تفاضل دو کسر و یا تفاضل افاده های جذر دار اتفاق ا افتد، در اثر تفریق کردن کسر ها از همدیگر و یا ضرب و تقسیم افاده های جذر دار بر مزدوج آن ها ابهام قابل رفع می باشد

مثال ها (صفحات19 و 20)

$$1.\ \lim_{x\to 1}\left(\frac{9}{x-1}-\frac{8x+10}{x^2-1}\right)\overset{\infty-\infty}{=}\lim_{x\to 1}\frac{9x+9-8x-10}{x^2-1}$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{x-1}{x^2-1}\overset{\frac{0}{0}}{=}\lim_{x\to 1}\frac{x-1}{(x+1)(x-1)}=\lim_{x\to 1}\frac{1}{x+1}=\frac{1}{2}$$

$$2.\ \lim_{x\to 1}\left[(x-1)\frac{1}{x^2+2x-3}\right]\overset{0\cdot\infty}{=}\lim_{x\to 1}\frac{x-1}{x^2+2x-3}$$

$$\overset{\frac{0}{0}}{=}\lim_{x\to 1}\frac{x-1}{(x-1)(x+3)}=\lim_{x\to 1}\frac{1}{x+3}=\frac{1}{4}$$

درس سوم. لیمت توابع نمایی و لوگارتمی: قضیه $\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e$، نمونه های مهم، حالت $\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{\alpha}{x}\right)^{\beta x}=e^{\alpha\beta}$ و مثال های مناسب.

مقدمه. درتوابع لوگارتمی و نمایی نیز زمانی که محاسبه لیمت ها مطرح میشود ممکن است حالات ابهام بوجود آید و مخصوصا حالت مبهم 1^{∞} درین توابع بمشاهده می رسد.در محاسبه لیمت های توابع نمایی و رفع ابهام 1^{∞} قضیه ذیل ماهیت اصلی ذیل دارد.

قضیه اساسی. هرگاه n بطرف بینهایت تقرب کند، ترادف $a_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ به عدد $e = 2.7182818284\cdots$ تقرب می نماید، یعنی

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e$$

يادداشت: هـرگاه بدون مراجعه بیک ثبوت دقـیق، قیمتهای ترادف $a_n = (1+\frac{1}{n})^n$ دریک جدول طورتدریجی فهرست شوند داریم که:

n	$\frac{1}{n}$	$1+\frac{1}{n}$	$(1+\frac{1}{n})^n$
1	1	2	2
2	0.5	1.5	2.25
5	0.2	1.2	2.48832
10	0.1	1.1	2.59374246
100	0.01	1.01	2.704813829
1,000	0.001	1.001	2.716923932
10,000	0.0001	1.0001	2.718145926
100,000	0.00001	1.00001	2.718268237
1,000,000	0.000001	1.000001	2.718280469
1,000,000,000	10^{-9}	$1+10^{-9}$	2.718281828

بنابرین $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = 2.718\ 281\ 828\cdots$ است، عدد e بنام عدد اویلریاد میشود.

نتیجه..هرگاه عدد حقیقی x بطرف بینهایت تقرب کند، تابع $\varepsilon(x) = \left(1+\frac{1}{x}\right)^x$ نیز به عدد e تقرب می نماید، یعنی

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\tfrac{1}{x}\right)^x = e$$

لیمت های اساسی توابع نمایی و لوگارتمی ص22

$$1.\quad \lim_{\alpha\to 0}(1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}} = e \quad , \quad 2.\quad \lim_{x\to\infty}\left(1+\tfrac{\alpha}{x}\right)^{\beta x} = e^{\alpha\beta}$$

$$3.\quad \lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x} = 1 \quad , \quad 4.\quad \lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x} = 1$$

ثبوت

$$1.\quad x=\frac{1}{\alpha}\Rightarrow\alpha=\frac{1}{x}\quad\Rightarrow\quad\lim_{\alpha\to0}(1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}=e$$

$$2.\quad u=\frac{\alpha}{x}\Rightarrow x=\frac{\alpha}{u}\Rightarrow\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{\alpha}{x}\right)^{\beta x}=\lim_{u\to0}\left[(1+u)^{\frac{1}{u}}\right]^{\alpha\beta}=e^{\alpha\beta}$$

3. با استفاده از خواص لوگارتم طبیعی داریم که:

$$\lim_{x\to0}\frac{\ln(1+x)}{x}=\lim_{x\to0}\left[\frac{1}{x}\ln(1+x)\right]=\lim_{x\to0}\left[\ln(1+x)^{\frac{1}{x}}\right]$$

$$=\ln\left[\lim_{x\to0}(1+x)^{\frac{1}{x}}\right]=\ln e=1$$

4. درین بخش تعویض $y=e^{\alpha}-1$ را در نظر می گیریم

$$\Rightarrow\lim_{x\to0}\frac{e^{x}-1}{x}=\lim_{x\to0}\frac{y}{\ln(1+y)}=\lim_{x\to0}\frac{1}{\frac{\ln(1+y)}{y}}=\frac{1}{\lim\limits_{x\to0}\frac{\ln(1+y)}{y}}=\frac{1}{1}=1$$

حالت عمومی مبهم 1^{∞}: هرگاه لمیت تابع نمایی بشکل $\lim\limits_{x\to a}[u(x)]^{v(x)}$، صورت مبهم 1^{∞}رااختیارنماید، درین حالت با تعویض $\alpha=u-1$ داریم که

$$\lim_{x\to a}u^{v}=\lim_{x\to a}\left[(1+u-1)^{\frac{v}{u-1}(u-1)}\right]=\lim_{x\to a}\left[(1+\alpha)^{\frac{v}{\alpha}\alpha}\right]=\left[\lim_{x\to a}(1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}\right]^{\lim\limits_{x\to a}(v\alpha)}$$

چون $\alpha=u-1$ و $u\to1$، لذا $\alpha\to0$، درنتیجه

$$\lim_{x\to a}[u(x)]^{v(x)}=\left[\lim_{\alpha\to0}(1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}\right]^{\lim\limits_{x\to a}[v(u-1)]}=e^{\lim\limits_{x\to a}[v(u-1)]}$$

بنابرین

$$\lim_{x\to a}[u(x)]^{v(x)}\overset{1^{\infty}}{=}e^{p}\ ,\ p=\lim_{x\to a}[v(u-1)]$$

یادآوری باید نمود که فورمول فوق فقط درحالت مبهم 1^{∞} قابل تطبیق است.

مثالها (صفحات 23 و 24)

$$1.\ \lim_{x\to\infty}(1+\tfrac{2}{x})^{x}=e^{2}\ ,\ 2.\ \lim_{x\to\infty}(\cos x)^{\frac{1}{x}}=e^{p}=e^{0}=1$$

لکچر سوم

لیمت توابع مثلثاتی

قضیه $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$ ، مثال های تطبیقی.

در محاسبه لیمت توابع مثلثاتی ممکن است حالات ابهام بوجود آید که مهمترین اشکال ابهام درین نوع لیمت شکل $\frac{0}{0}$ است و این حالت را میتوان با تشخیص یک فکتور عمده که نسبت $\sin x$ و زاوایه xاست رفع نموداماقبل ازان نمونه های ذیل را تجربه میکنیم.

قضیه اساسی: زمانی که زاویه xبسمت صفر تقرب مینماید، نسبت $\sin x$ و x بطرف 1 تقرب می کند(شکل9.2)، یعنی:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$$

ثبوت (صفحه 25 و 26 کتاب صنف12)

$$1.\ \lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{(1-\cos x)(1+\cos x)}{x(1+\cos x)}=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos^2 x}{x(1+\cos x)}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 x}{x(1+\cos x)}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{1+\cos x}=1\cdot\tfrac{0}{2}=0$$

$$2.\ \lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{(1-\cos x)(1+\cos x)}{x^2(1+\cos x)}=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos^2 x}{x^2(1+\cos x)}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 x}{x^2(1+\cos x)}=\left(\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\right)^2\lim_{x\to 0}\frac{1}{1+\cos x}=1\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$$

نمونه های مهم: در قدم اول لیمت های

$$3.\ \lim_{x\to 0}\frac{\sin\alpha x}{\sin\beta x}=\lim_{x\to 0}\frac{\alpha x\times\frac{\sin\alpha x}{\alpha x}}{\alpha x\times\frac{\sin\beta x}{\beta x}}=\lim_{x\to 0}\frac{\alpha\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin\alpha x}{\alpha x}}{\alpha\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin\beta x}{\beta x}}=\frac{\alpha}{\beta}$$

مثال ها (صفحات26 – کتاب صنف12 28)

$$1.\ \lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{x}=2\quad,\quad 2.\ \lim_{x\to 0}\frac{5\tan 2x}{7x}=\frac{10}{7}$$

$$3.\ \lim_{x\to 0}\frac{\tan 3x}{\sin 5x}=\frac{3}{5}\quad,\quad 4.\ \lim_{x\to 0}\frac{\cos 2x-\cos 6x}{x^2}=10?$$

لکچر چهارم

متمادیت تابع

مفهوم تمادیت تابع، خواص تمادیت، نمونه های مهم، عدم تمادیت.

تمادیت تابع (پیوستگی): تابع $f(x)$ در نقطه $x=a$ متمادی گفته میشود هرگا سه شرط ذیل را صدق نماید

اول– تابع f در $x=a$ تعریف شده باشد یعنی $f(a)$ موجود باشد.

دوم– تابع f در $x=a$ دارای لیمت باشد یعنی $\lim_{x\to a} f(x)$ وجود داشته باشد.

سوم– لیمت تابع f در a مساوی $f(a)$ باشد، یعنی $\lim_{x\to a} f(x)=f(a)$

درصورتیکه تابع در هرنقطه یک انتروال متمادی باشد، درین انتروال متمادی نامیده میشود.

مثال 1. آیا تابع $f(x)=x^2+1$ در نقطه $x=5$ متمادی است ؟

حل: تابع f در $x=5$ تعریف شده و $f(2)=5^2+1=26$ و $26=\lim_{x\to 5}(x^2+1)=\lim_{x\to 5} f(x)$ بنابرین $\lim_{x\to 5} f(x)=26=f(5)$ لهذا f در نقطه $x=5$ متمادی است.

مثال 2. نشان دهید که توابع $f(x)=\sin x$ ،$g(x)=\cos x$ در تمام اعداد حقیقی متمادی اند

حل: می دانیم این دو تابع برای هرعدد حقیقی $x=a$ تعریف شود و لیمت های انها نیز دران وجود دارد و برعلاوه

$$\lim_{x\to a} f(x)=\lim_{x\to a}\sin x=\sin a=f(a)$$
$$\lim_{x\to a} g(x)=\lim_{x\to a}\cos x=\cos a=g(a)$$

بنا برین توابع متذکره برای هر عدد حقیقی متمادی می باشد.

مثال 3. نشان دهید که توابع پولینومی، در تمام اعداد حقیقی متمادی اند

حل: می دانیم که تابع پولینومی اختیاری $P(x)$ برای هرعدد حقیقی $x=a$ تعریف شود و لیمت آن نیز درین عدد وجود دارد و برعلاوه

$$\lim_{x\to a} P(x)=P(a)$$

بنا برین پولینوم متذکره برای هر عدد حقیقی متمادی می باشد.

مثال4. نشان دهید که هر تابع ناطق $f(x)=\frac{P(x)}{Q(x)}$، در تمام اعداد حقیقی متمادی است.

حل: می دانیم که تابع ناطق $f(x)=\frac{P(x)}{Q(x)}$ برای هرعدد حقیقی $x=a$ از ناحیه تعریفش دارای لیمت است و برعلاوه

$$\lim_{x\to a} f(x)=\lim_{x\to a}\frac{P(x)}{Q(x)}=\frac{P(a)}{Q(a)}=f(a)$$

بنا برین تابع ناطق برای هر عدد حقیقی متمادی می باشد.

خواص تمادیت توابع. هرگاه توابع f و g در a متمادی باشند، پس توابع $f+g$، $f-g$، fg و $\frac{f}{g}$ با شرط $g(a)\neq 0$ متمادی می باشند.

ثبوت: به آسانی دیده می شود که

$$\lim_{x\to a}(f+g)(x)=\lim_{x\to a} f(x)+\lim_{x\to a} g(x)=f(a)+g(a)=(f+g)(a)$$
$$\lim_{x\to a}(f-g)(x)=\lim_{x\to a} f(x)-\lim_{x\to a} g(x)=f(a)-g(a)=(f-g)(a)$$
$$\lim_{x\to a}(f\,g)(x)=\lim_{x\to a} f(x)\lim_{x\to a} g(x)=f(a)\,g(a)=(f\,g)(a)$$
$$\lim_{x\to a}\left(\frac{f}{g}\right)(x)=\frac{\lim_{x\to a} f(x)}{\lim_{x\to a} g(x)}=\frac{f(a)}{g(a)}=\left(\frac{f}{g}\right)(a)\quad,\quad g(a)\neq 0$$

بنابرین متمادی بودن توابع مطلوب واضح است.

متمادی بودن توابع مرکب. هـرگاه $\lim_{x\to a} g(x)=b$ و $f(x)$ در $x=b$ متمادی باشد، پس

$$\lim_{x\to a} f(g(x))=f\left(\lim_{x\to a} g(x)\right)=f(b)$$

و اگر g در $x=a$ و f در $x=g(a)$ متمادی باشند، پس تابع $f\circ g$ در $x=a$ نیز متمادی است، یعنی

$$\lim_{x\to a} f(g(x))=f\left(\lim_{x\to a} g(x)\right)=f(g(a))$$

نتیجه. محاسبه لیمت ها با در نظر داشت خواص تمادیت ساده می شود، موارد ذیل را در نظر گیرید

$$1.\ \lim_{x\to a}[f(x)]^{\alpha}=\left[\lim_{x\to a} f(x)\right]^{\alpha},\alpha\in\mathbb{R}\quad,\quad 2.\ \lim_{x\to a}\left[b^{f(x)}\right]=b^{\lim_{x\to a} f(x)},b>0$$
$$3.\ \lim_{x\to a}(\sin f(x))=\sin\left[\lim_{x\to a} f(x)\right]\quad,\quad 4.\ \lim_{x\to a}[\log_b f(x)]=\log_b\left[\lim_{x\to a} f(x)\right]$$

مثالها. با در نظر داشت بعضی خواص متمادی بودن توابع لیمت های ذیل محاسبه می گردد

$$1.\ \lim_{x\to\infty}\left(\frac{12x^9-5x^3}{4x^9+8}\right)^4=\left(\lim_{x\to\infty}\frac{12x^9-5x^3}{4x^9+8}\right)^4=\left(\frac{12}{4}\right)^4=(3)^4=81$$

$$6.\quad \lim_{x\to\infty} 2^{\frac{6x+4}{3-2x}} = 2^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{6x+4}{3-2x}} = 2^{\frac{6}{-2}} = 2^{-3} = \frac{1}{2^3} = \frac{1}{8}$$

$$8.\ \lim_{x\to2}\log\frac{2x^3+184}{x^2-2} = \log\frac{\lim\limits_{x\to2}(2x^3+184)}{\lim\limits_{x\to2}(x^2-2)} = \log\frac{2\cdot2^3+184}{2^2-2} = \log100 = 2$$

غیرتمادیت (انفصال). هرگا تابع f در $x=a$ یکی ازسه شرط متمادیت رانداشته باشد، می گوییم که f در a غیرمتمادی است و a نقطه انفصال می باشد. انفصال سه نوع است.

نوع اول- تابع f در $x=a$ دارای لیمت های راست وچپ بوده ولی این لیمت ها مساوی هم دیگرنمی باشند. یعنی $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ وجود ندارد.

نوع دوم- اگرلااقل یکی ازدولیمت وجودنداشته باشد.

نوع سوم- درصورتیکه تابع دریک نقطه دارای لیمت بوده ولی درآن تعریف نشده باشد(فقط یک نقطه خالی باشد). درینحالت انفصال را قابل حذف می گویند.

لکچر پنجم

مشتقات

معرفی مشتق تابع: تزاید های تابع و متحول، نسبت تزاید های تابع و متحول، میل قاطع و مماس بر گراف تابع، تعریف مشتق، مثال تعبیر هندسی مشتق

تعریف مشتق: هر گاه در تابع $y=f(x)$، متحول x بقدر Δx تزاید نماید، تابع مذکور یک تزاید $\Delta y=f(x+h)-f(x)$ را متحمل میشود. نسبت تزاید تابع و متحول عبارت است از

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$$

در صورتیکه:

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$$

وجود داشته باشد، گفته میشود تابع $f(x)$ در نقطه x دارای مشتق است. بدست آوردن لیمت فوق الذکر را عملیه مشتق گیری می گویند. مشتق تابع $y=f(x)$ مطابق نمونه فوق بیکی از سمبول های

$$y'=f'(x) \quad \text{یا} \quad \frac{dy}{dx}=\frac{df(x)}{dx}$$

ارایه می گردد. یعنی:

$$y'=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=f'(x)$$

مثال1. مشتق $f(x)=2x$

مثال2. مشتق $f(x)=x^3$

مثال3. مشتق $f(x)=\sqrt{x}$

تمرین صفحه 51.

تعبیر هندسی مشتق. هرگاه در نقطهٔ $(x_0, f(x_0))$ یک خط مستقم مماس رسم شود، میل این خط مستقیم که بنام میل تابع f در همین نقطه یاد می شود، عبارت است از

$$m=f'(x_0)$$

مثال1. میل مماس در نقطه $(1,1)$ از گراف تابع $f(x)=2x^3-1$ را دریافت کنید.

مثال2. میل مماس در نقطه $x_0 = 2$ از گراف تابع $f(x) = x^2 + 1$ را دریافت کنید.

مثال3. میل مماس در نقطه $x_0 = 2$ از گراف تابع $f(x) = x^2$ را دریافت کنید.

مثال4. میل مماس در نقطه x_0 از گراف تابع $f(x) = x^3$ را دریافت کنید.

مثال5. میل مماس در نقطه x_0 از گراف تابع $f(x) = \frac{1}{x}$ را دریافت کنید.

صفحات(50 و 51)

لکچر ششم

قوانین مشتق

مشتقات توابع ثابت و طاقت، مشتقات مجموع، حاصل ضرب و تقسیم توابع، حالات خصوصی، جذر تابع و(ضریب تابع) و توابع پولینومیل.

مشتق تابع ثابت **.** مشتق تابع ثابت $g(x)=c$ را محاسبه می کنیم.

$$g'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{g(x+\Delta x)-g(x)}{\Delta x}=\lim_{h\to 0}\frac{c-c}{\Delta x}\Rightarrow g'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{0}{\Delta x}=0$$

لذا مشتق تابع ثابت صفر می باشد.

مشتق تابع طاقت: مشتق تابع $y=x^n$ برای عدد طبیعی n عبارت از $y'=nx^{n-1}$ می باشد.

ثبوت

$$y=x^n\Rightarrow y+\Delta y=(x+\Delta x)^n\Rightarrow \Delta y=(x+\Delta x)^n-x^n$$

یعنی

$$\Delta y=(x+\Delta x-x)\left[(x+\Delta x)^{n-1}+(x+\Delta x)^{n-2}x+(x+\Delta x)^{n-3}x^2+\cdots+x^{n-1}\right]$$

یا

$$\Delta y=\Delta x\left[(x+\Delta x)^{n-1}+(x+\Delta x)^{n-2}x+(x+\Delta x)^{n-3}x^2+\cdots+x^{n-1}\right]$$

از تقسیم اطراف رابطه اخیر بر Δx میابیم که.

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{\Delta x\left[(x+\Delta x)^{n-1}+(x+\Delta x)^{n-2}x+(x+\Delta x)^{n-3}x^2+\cdots+x^{n-1}\right]}{\Delta x}$$

ازینجا

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{(x+\Delta x)^{n-1}+(x+\Delta x)^{n-2}x+(x+\Delta x)^{n-3}x^2+\cdots+x^{n-1}}{\Delta x}$$

بنابرین

$$\begin{aligned}y'&=\lim_{\Delta x\to 0}\left[(x+\Delta x)^{n-1}+(x+\Delta x)^{n-2}x+(x+\Delta x)^{n-3}x^2+\cdots+x^{n-1}\right]\\&=\underbrace{x^{n-1}+x^{n-1}+x^{n-1}+\cdots+x^{n-1}}_{n}=nx^{n-1}\ .\end{aligned}$$

مثال. مشتق تابع $y=x^5$ را نقطه $x=\frac{1}{2}$ دریافت کنید .

حل.

$$f'(x)=\left(x^5\right)'=5x^{5-1}=5x^4 \Rightarrow f'\left(\tfrac{1}{2}\right)=5\left(\tfrac{1}{2}\right)^4=\tfrac{5}{16}.$$

مشتق حاصل جمع توابع

برای $y=u+v$ در حالی که u و v دو تابع اند داریم که

$$y+\Delta y=(u+\Delta u)+(v+\Delta v)$$
$$\Delta y=(u+\Delta u)+(v+\Delta v)-y=(u+\Delta u)+(v+\Delta v)-(u+v)$$
$$\Rightarrow \Delta y=\Delta u+\Delta v$$
$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{\Delta u+\Delta v}{\Delta x}=\frac{\Delta u}{\Delta x}+\frac{\Delta v}{\Delta x}$$
$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{\Delta u+\Delta v}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta u}{\Delta x}+\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta v}{\Delta x}$$

در نتیجه

$$\boxed{y'=(u+v)'=u'+v'}$$

مشتق حاصل تفریق توابع به طور مشابه اثبات می شود.

اکنون شاگردان می توانند توابع پولینومیل را مشتق گیرند.

مثال ها. مشتق توابع ذیل را دریافت کنید:

1. $y=2x+1$, 2. $y=4x^2-3x+5$, 3. $y=12x-7$.

4. $f(x)=9x^2-12x+4$, 5. $f(x)=6x^3-x^2+6x-1$

مشتق حاصل ضرب توابع. برای $y=uv$ طبق تعریف مشتق داریم که:

$$y+\Delta y=(u+\Delta u)(v+\Delta v)$$
$$y+\Delta y=uv+u(\Delta v)+(\Delta u)v+(\Delta u)(\Delta v)$$
$$\Delta y=uv+u(\Delta v)+(\Delta u)v+(\Delta u)(\Delta v)-y$$
$$\Delta y=uv+u(\Delta v)+(\Delta u)v+(\Delta u)(\Delta v)-uv$$
$$\Delta y=u(\Delta v)+(\Delta u)v+(\Delta u)(\Delta v)$$

بنابرین

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{u(\Delta v)+(\Delta u)v+(\Delta u)(\Delta v)}{\Delta x}=u\frac{\Delta v}{\Delta x}+v\frac{\Delta u}{\Delta x}$$

پس

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=v\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta u}{\Delta x}+u\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta v}{\Delta x}=u'v+uv'$$

در نتیجه

$$\boxed{y'=(uv)'=u'v+uv'}$$

مثال. مشتق تابع $y=x^3(x^2-3)$ را دریافت کنید (**صفحه57).**

مشتق حاصل تقسیم توابع. برای $y=\frac{u}{v}$ طبق تعریف مشتق داریم که

$$y=\frac{u}{v}\Rightarrow y+\Delta y=\frac{u+\Delta u}{v+\Delta v}\Rightarrow \Delta y=\frac{u+\Delta u}{v+\Delta v}-y$$

$$\Rightarrow \Delta y=\frac{u+\Delta u}{v+\Delta v}-\frac{u}{v}\Rightarrow \Delta y=\frac{(u+\Delta u)v-u(v+\Delta v)}{(v+\Delta v)v}$$

$$\Rightarrow \Delta y=\frac{uv+v\Delta u-uv-u\Delta v}{(v+\Delta v)v}\Rightarrow \Delta y=\frac{v\Delta u-u\Delta v}{(v+\Delta v)v}$$

$$\Rightarrow \frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{\frac{v\Delta u-u\Delta v}{(v+\Delta v)v}}{\Delta x}=\frac{v\Delta u-u\Delta v}{\Delta x(v+\Delta v)v}=\frac{\frac{v\Delta u-u\Delta v}{\Delta x}}{(v+\Delta v)v}$$

$$\Rightarrow \frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{v\frac{\Delta u}{\Delta x}-u\frac{\Delta v}{\Delta x}}{(v+\Delta v)v}\Rightarrow \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{v\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta u}{\Delta x}-u\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta v}{\Delta x}}{\lim\limits_{\Delta x\to 0}\left[(v+\Delta v)v\right]}$$

ازینجا به دست می اید که

$$y'=\left(\frac{u}{v}\right)'=\frac{u'v-uv'}{v^2}$$

مثال. مشتق $y=\frac{2+3x}{1-2x}$ را دریافت کنید (صفحه 52).

مثال. مشتق جذر دوم بحیث تابع طاقت میتواند محاسبه گردد.

لکچر هفتم

مشتقات توابع مثلثاتی

مشتقات توابع ساین، کوساین بحیث اساس سایر توابع مثلثاتی بحیث مثال در این درس فقط باید ثبوت گردد که:

$$\boxed{(\sin x)' = \cos x \quad , \quad (\cos x)' = -\sin x}$$

مشتق تابع ساین. برای تابع $y = \sin x$ داریم که

$$y = \sin x \Rightarrow y + \Delta y = \sin(x + \Delta x) \Rightarrow \Delta y = \sin(x + \Delta x) - y$$

$$\Rightarrow \Delta y = \sin(x + \Delta x) - \sin x = 2\cos\frac{x + \Delta x + x}{2}\sin\frac{x + \Delta x - x}{2}$$

$$\Rightarrow \Delta y = 2\cos\frac{2x + \Delta x}{2}\sin\frac{\Delta x}{2} \Rightarrow \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{2\cos\frac{2x + \Delta x}{2}\sin\frac{\Delta x}{2}}{\Delta x}$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = 2\cos\frac{2x + \Delta x}{2}\cdot\frac{\sin\frac{\Delta x}{2}}{\Delta x} = \cos\frac{2x + \Delta x}{2}\cdot\frac{\sin\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}}$$

ازینجا داریم که

$$\lim_{\Delta x \to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0}\left(\cos\frac{2x + \Delta x}{2}\right)\lim_{\Delta x \to 0}\frac{\sin\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}} = \cos x .1 = \cos x .$$

یعنی

$$y' = (\sin x)' = \cos x$$

مشتق تابع کوساین. برای تابع $y = \cos x$ داریم که

$$y = \cos x \Rightarrow y + \Delta y = \cos(x + \Delta x) \Rightarrow \Delta y = \cos(x + \Delta x) - y$$

$$\Rightarrow \Delta y = \cos(x + \Delta x) - \cos x = -2\sin\frac{x + \Delta x + x}{2}\sin\frac{x + \Delta x - x}{2}$$

$$\Rightarrow \Delta y = -2\sin\frac{2x + \Delta x}{2}\sin\frac{\Delta x}{2} \Rightarrow \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{-2\sin\frac{2x + \Delta x}{2}\sin\frac{\Delta x}{2}}{\Delta x}$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = -2\sin\frac{2x + \Delta x}{2}\times\frac{\sin\frac{\Delta x}{2}}{\Delta x} = -\sin\frac{2x + \Delta x}{2}\times\frac{\sin\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}}$$

ازینجا داریم که

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\left(\sin\frac{2x+\Delta x}{2}\right)\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sin\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}}=-\sin x.1=-\sin x$$

یعنی

$$y'=(\cos x)'=-\sin x$$

یادداشت: در صفحات 67 و 69 عوض $\dfrac{\sin\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}}$ مفهوم غلط $\sin\dfrac{\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}}$ آمده که باید تصحیح گردد.

مشتقات توابع تنجنت و کوتنجنت بحیث مثال های مشتقات حاصل تقسیم دریافت شوند.

یعنی

$$(\tan x)'=\left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)'=?\quad,\quad(\cot x)'=\left(\frac{\cos x}{\sin x}\right)'=?$$

(صفحات 71 و 72)

مشتقات توابع تنجنت و کوتنجنت: باتطبیق روش مشتق گیری حاصل تقسیم توابع میتوان نوشت که

$$\frac{d}{dx}(\tan x)=\frac{d}{dx}\left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)=\frac{\cos x\,\frac{d}{dx}\sin x-\sin x\,\frac{d}{dx}\cos x}{\cos^2 x}$$

$$=\frac{\cos^2 x+\sin^2 x}{\cos^2 x}=\frac{1}{\cos^2 x}=\sec^2 x\ \cdot$$

بهمین قسم

$$\frac{d}{dx}(co\ \mathrm{t}x)=\frac{d}{dx}\left(\frac{co\ \mathrm{s}x}{\sin x}\right)=\frac{\sin x\,\frac{d}{dx}\cos x-co\ \mathrm{s}x\,\frac{d}{dx}\sin x}{\sin^2 x}$$

$$=\frac{-\sin^2 x-co\ \mathrm{s}^2 x}{\sin^2 x}=-\frac{1}{\sin^2 x}=co\sec^2 x\ \bullet$$

در نتیجه

$$\frac{d}{dx}(\tan x)=\frac{1}{\cos^2 x}=\sec^2 x$$

$$\frac{d}{dx}(co\ \mathrm{t}x)=-\frac{1}{\sin^2 x}=-c\ \mathrm{sc}^2 x$$

مثال7. مشتق تابع $y=\dfrac{x^2}{\cos x}$ را بدست می آوریم:

$$y' = \frac{2x\cos x - (-\sin x)x^2}{\cos^2 x} = \frac{2x\cos x + x^2 \sin x}{\cos^2 x}$$

مثال8. مشتق تابع $y = x^3 \sin x$ را دریافت مینمایم

$$y' = (x^3)' \sin x + (x^3)\sin' x = 3x^2 \sin x + x^3 \cos x .$$

لکچر هشتم

مشتق توابع مرکب یا تابع تابع (قانون زنجیری)

حالت عمومی $\left[f\left(g(x)\right)\right]'=f_g'\left(g(x)\right)g'(x)$ و نمونه های آن، مشتق تابع ضمنی، مشتق تابع معکوس و مشتقات

هرگاه $y=f(u)$ و $u=g(x)$ باشد، یعنی $y=f\left(g(x)\right)$ درینصورت

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\times\frac{du}{dx}\quad or\quad y_x'=y_u'\times u_x'$$

ثبوت. برا ی $\Delta y=f(u+\Delta u)-f(u)$ و $\Delta u=g(x+\Delta x)-f(x)$ واضح است که اگر $\Delta x\to 0$ درینصورت $\Delta u\to 0$ بنابرین میتوان نوشت که:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{\Delta y}{\Delta u}\times\frac{\Delta u}{\Delta x}\Rightarrow\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta u}\times\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta u}{\Delta x}=\lim_{\Delta u\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta u}\times\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta u}{\Delta x}$$

یعنی

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta u\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta u}\times\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta u}{\Delta x}\Rightarrow y_x'=y_u'\times u_x'$$

مثال ها از <ins>صفحه 64</ins>

$$1.\ y=\left(2x^2-1\right)^2\ ,\quad 2.\ y=\sqrt{1-x^2}\ ,\quad 3.\ y=\left(x^2-3\right)^2\cdot 2x^3$$

$$4.\ y=\sqrt[3]{x^2-2x^3}\ ,\quad 5.\ y=\left(x^2-2\right)^{-3}$$

مشتق تابع ضمنی. حالت $y=f(x)$ از تابع که دران y از جنس x ارایه گردیده، بنام حالت صریح تابع گفته می شود اما ممکن است که یک تابع شکل دیگری قرار ذیل ارایه شود، یعنی

$$F(x,y)=0$$

درینجا y تابعی از متحول x می باشد که حالت غیر صریح یا حالت ضمنی دارد.

مثال. تابع ذیل در دو حالت ارایه شده:

حالت صریح: $y=\sqrt{1-x^2}$

حالت غیر صریح: $x^2+y^2=25$

مشتق گیری تابع ضمنی. درین حالت اطراف معادله نظر به x طوری مشتق گرفته می شود که دران y تابعی از x در نظر گرفته می شود و از مشتق گیری تابع تابع استفاده به عمل می آید.

مثال. از رابطهٔ $xy^2 - y + 1 = 0$ مشتق $\frac{dy}{dx}$ را دریافت کنید

حل

$$\begin{cases} xy^2 - y + 1 = 0 \Rightarrow \left(xy^2 - y + 1'\right) = 0 \\ \Rightarrow 1 \cdot y^2 + x2yy' - y' = 0 \\ \Rightarrow y'\left(2xy - 1\right) = -y^2 \Rightarrow y' = -\dfrac{y^2}{2xy - 1} \end{cases}$$

پس مشتق مطلوب عبارت است از

$$y' = -\frac{y^2}{2xy - 1}$$

مثال ها از صفحات $74 - 76$.

لکچر نهم

موارد استعمال مشتق

کاربرد مشتق در ترسیم گراف ها: نقاط بحرانی (اعضمی و اضغری)، انعطاف، اعظمی و اضغری مطلق.

نقاط بحرانی (اعظمی و اصغری)، انعطاف، اعظمی و اصغری مطلق

تزاید و تناقص تابع: هرگاه تابع f در یک انتروال I تعریف شده و x_1 و x_2 اعدادی ازین انتروال باشند.

1) تابع f در انتروال I متزاید است اگر $f(x_1)<f(x_2)$ در حالیکه $x_1<x_2$.

2) تابع f در انتروال I متناقص است اگر $f(x_1)>f(x_2)$ در حالیکه $x_1<x_2$.

نقاط بحرانی: یک نقطهٔ داخلی c از ناحیه تعریف تابع f به نام نقطه بحرانی آن یاد می گردد، اگر مماس در $(c, f(c))$ از گراف، حالت افقی داشته باشد و یا اینکه دران مشتق پذیر نباشد، یعنی $f'(c)=0$ یا $f'(c)$ وجود نداشته باشد.

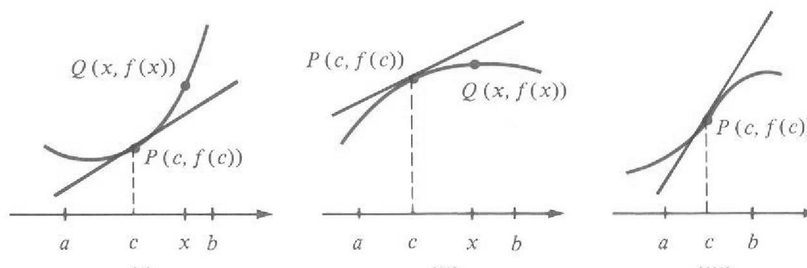
اعظمی و اصغری موضعی: اگر c عددی از ناحیه تعریف تابع f باشد.

1) $f(c)$ اعظمی موضعی تابع f است اگر یک انتروال باز (a, b) در بر گیرنده c وجود داشته باشد طوریکه $f(x)\le f(c)$ برای هر x از انتروال (a, b) یعنی $f(c)=\max\limits_{(a,b)} f(x)$ و $(c, f(c))$ نقطه اعظمی موضعی است.

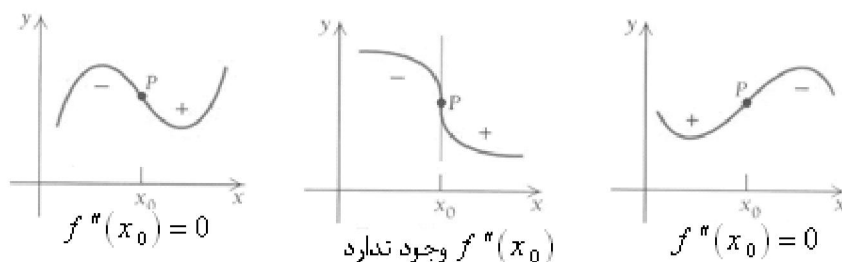
2) $f(c)$ اصغری موضعی تابع f است اگر یک انتروال باز (a, b) در بر گیرنده c وجود داشته باشد طوریکه $f(x)\ge f(c)$ برا هر x از انتروال (a, b) یا $f(c)=\min\limits_{(a,b)} f(x)$ و $(c, f(c))$ نقطه اصغری موضعی می باشد.

اصطلاح موضعی ($local$) به این مفهوم است که تابع دارای اعظمی و یا اصغری در یک انتروال ولو فوق العاده محدود می باشد

محدب بودن و مقعر بودن گراف: هرگاه تابع f در عدد c مشتق پذیر باشد. گراف f در نقطه $P(c, f(c))$ محدب گفته میشود، هرگاه انتروال (a,b) در برگیرنده c وجود داشته باشد طوری که دران که مماس P، فوق گراف واقع شود و این منحنی مقعر نامیده میشود، در صورتیکه مماس مذکور تحت گراف f موقعیت گیرد.



انعطاف: نقطه ایکه انتروال های تحد ب(محدب بودن) و تقعر (مقعربودن) گراف تابع را از همد گر جدا می سازد، بنام نقطه انعطاف یا د می گردد. مانند نقطه P در هریک از اشکال ذیل.



اعظمی و اصغری مطلق

هرگاه f تابعی با ناحیهٔ تعریف D باشد. گفته می شود که f یک اعظمی مطلق روی D در نقطه c دارد اگر $f(x)\le f(c)$ برای هر x در D و $f(c)=\max\limits_{x\in D} f(x)=M$ قیمت اعظمی f در D نامیده می شود(شکل11.18). به طور مشابه f یک اصغری مطلق روی D در نقطه c دارد اگر $f(x)\ge f(c)$ برای هر x در D و $f(c)=\min\limits_{x\in D} f(x)=m$ را قیمت اصغری f در D می نامند. قیمت های اعظمی و اصغری f بنام قیمت های اکستریم مطلق آن نیز گفته می شوند.

تعین اعظمی و اصغری مطلق : ممکن است تابع در یک انتروال دارای چندین اعظمی و اصغری موضعی باشد ولی در یک انتروال ، تابع صرف دارای یک اعظمی مطلق و یک قیمت اصغری مطلق می باشد. جهت تعین قیمت های اعظمی مطلق و اصغری مطلق تابع متمادلی f در انتروال $[a\ ,\ b]$ دستور ذیل را تعقیب می کنیم

1. نقاط بحرانی تابع f را تعین می کنیم
2. قیمت های $f(c)$ را در حالیکه c نقطه بحرانی f باشد محاسبه می نماییم.
3. قیمت های $f(a)$ و $f(b)$ را محاسبه می کنیم.

بزرگترین و کوچکترین اعداد محاسبه شوده در مراحل 1 و 2 به ترتیب عبارت از اعظمی مطلق و اصغری مطلق تابع f می باشد.

کاربرد مشتق اول در گراف تابع

تزاید. اگر مشتق تابع f در انتروال $(a\ ,b)$ مثبت باشد، این تابع در انتروال مذکور متزاید است.

تناقص. اگر مشتق تابع f در انتروال $(a\ ,b)$ منفی باشد، این تابع در انتروال مذکور متناقص است.

مثال 1. تزاید و تناقص تابع $f(x)=x^3+3x+1$

حل.

$$f'(x)=3x^2+3\ >\ 0$$

چون مشتق تابع در تمام اعداد حقیقی مثبت است، پس تابع متزاید می باشد.

مثال2. تزاید و تناقص تابع $f(x)=x^3-3x+5$

حل. اشارهٔ مشتق را مطالعه می کنیم

$$f'(x)=3x^2-3\ ,\ \ f'(x)=0 \Rightarrow 3x^2-3=0 \Rightarrow x^2-1=0 \Rightarrow x=\pm 1$$

x	$(-\infty\ ,-1)$	$(-1\ ,1)$	$(1\ ,\infty)$
$f'(x)=3x^2-3$	$+$	$-$	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	$\searrow$	$\nearrow$

پس تابع در انتروال $(1\ ,1-)$ متناقص و در انتروال های $(\infty\ ,1)$ و $(1\ ,\infty-)$متزاید است.

مثال 3. تابع $y=5x-4$ متزاید است.

مثال4. تابع $y=x^2$ در $(0\ ,\ \infty-)$ متناقص و در $(\infty\ ,0)$متزاید می باشد زیراکه $y'=2x$ در در $(0\ ,\ \infty-)$ منفی و در $(0\ ,\ \infty)$ مثبت است.

اعظمی. هرگاه مشتق تابع f در نقطه x_0 مساوی صفر باشد و حین عبور ازان اشاره اش را از مثبت به منفی تغیر دهد، درینصورت $f(x_0)$ قیمت اعظمی موضعی تابع است.

x		x_0	
$f'(x)$	$+$	0	$-$
$f(x)$	$\nearrow$	$f(x_0)=\max f(x)$	$\searrow$

مثال. در جدول مثال قبل دیده شود، تابع در نقطه $x=-1$ اعظمی دارد

اصغری. هرگاه مشتق تابع f در نقطه x_0 مساوی صفر باشد و حین عبور ازان، اشاره اش را از منفی به مثبت تغیر دهد، درینصورت $f(x_0)$ قیمت اصغری موضعی تابع است.

x		x_0	
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\searrow$	$f(x_0)=\max f(x)$	$\nearrow$

مثال. در جدول مثال قبل دیده شود، تابع در نقطه $x=1$ اصغری دارد.

تمرین صفحه 87.

لکچر دهم

کاربرد مشتق دوم در گراف تابع

محدب بودن، مقعر بودن و نقطه انعطاف، استفاده از مشتق دوم در تعین آنها و نقاط بحرانی.

مقعر بودن. اگر مشتق دوم تابع f در انتروال (a,b) مثبت باشد، گراف این تابع در انتروال مذکور مقعر است.

محدب بودن. اگر مشتق دوم تابع f در انتروال (a,b) منفی باشد، گراف این تابع در انتروال مذکور محدب است.

انعطاف. هرگاه مشتق دوم تابع f در نقطه x_0 مساوی صفر باشد و حین عبور از ان اشاره اش را تغیر دهد، درینصورت تابع در x_0 انعطاف دارد..

x		x_0	
$f''(x)$	$+$	0	$-$
$f(x)$	مقعر	$\inf l.$	محدب

اصغری. هرگاه مشتق تابع f در نقطه x_0 مساوی صفر باشد و حین عبور ازان، اشاره اش را از منفی به مثبت تغیر دهد، درینصورت $f(x_0)$ قیمت اصغری موضعی تابع است.

x		x_0	
$f''(x)$	$+$	0	$-$
$f(x)$	محدب	$\inf l.$	مقعر

مثال ها.

کاربرد مشتقات اول و دوم در تعین اکستریم تابع

اعظمی. اگر $f'(x_0)=0$ و $f''(x_0)<0$ پس $(x_0, f(x_0))$ نقطه اعظمی است.

x	x_0
$f'(x)$	0
$f''(x)$	$-$
$f(x)$	$f(x_0)=\max f(x)$

اصغری. اگر $f'(x_0)=0$ و $f''(x_0)>0$ پس $\left(x_0, f(x_0)\right)$ نقطه اصغری است.

x	x_0
$f'(x)$	0
$f''(x)$	$+$
$f(x)$	$f(x_0)=\max f(x)$

مثال ها.

مثال1. نقاط اعظمی، اصغری و انعطاف $f(x)=x^3-\frac{7}{2}x^2+2x$ صفحه91

مثال2. نقاط اعظمی، اصغری و انعطاف $f(x)=\dfrac{x+1}{x^2-2x}$ صفحه91

مثال1. نقاط اعظمی، اصغری و انعطاف $f(x)=\frac{1}{2}x^2+3x-\frac{1}{2}$

مثال2. نقاط اعظمی، اصغری و انعطاف $f(x)=x^3-3x+2$ قبلا مطرح شد.

تابع درجه دو:

$$f(x)=ax^2+bx+c \Rightarrow f'(x)=2ax+b \Rightarrow f''(x)=2a$$
$$f'(x)=0 \Rightarrow 2ax+b=0 \Rightarrow x=-\tfrac{b}{2a} \Rightarrow f\left(-\tfrac{b}{2a}\right)=\tfrac{4ac-b^2}{4a}$$

x	$-\dfrac{b}{2a}$
$f'(x)$	0
$f''(x)$	$2a$
$f(x)$	$f\left(-\frac{b}{2a}\right)=\dfrac{4ac-b^2}{2a}$

پس برای $a<0$ گراف تابع محدب، بوده دارای اعظمی و برای $a>0$ مقعر است و اصغری دارد. چون $f''(x)=2a\neq 0$ بنابرین گراف تابع درجه دو، انعطاف ندارد.

مثال2. محدب بودن و مقعر بودن گراف $y=x^3+9x^2-6x+1$ را تعین کنید. صفحه 99.

حل. مشتق دوم را تحت بررسی قرار می دهیم.

$$y = x^3 + 9x^2 - 6x + 1 \Rightarrow y' = 3x^2 + 18x \Rightarrow y'' = 6x + 18$$
$$y'' = 0 \Rightarrow 6x + 18 = 0 \Rightarrow 6x = -18 \Rightarrow x = -3$$

x	$(-\infty\ ,-3)$	-3	$(-3\ ,\infty)$
$f''(x) = 6x + 18$	$-$	0	$+$
$f(x)$	محدب	انعطاف	مقعر

پس گراف تابع در انتروال $(-3\ ,\ \infty)$ مقعر و در $(-\infty\ ,\ -3)$ محدب می باشد، در $x = -3$ گراف انعطاف دارد.

مثال3. محدب بودن و مقعر بودن گراف $y = x^5 - 5x^3$ را تعین کنید. صفحه 99.

حل. مشتق دوم را تحت بررسی قرار می دهیم.

$$y = x^5 - 5x^3 \Rightarrow y' = 5x^4 + 15x^2 \Rightarrow y'' = 20x^3 + 30x$$
$$y'' = 0 \Rightarrow 20x^3 + 30x = 0 \Rightarrow x(20x^2 - 30) \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \pm\sqrt{\frac{3}{2}} \end{cases}$$

x	$\left(-\infty\ ,-\sqrt{\frac{3}{2}}\right)$	$\left(-\sqrt{\frac{3}{2}}\ ,0\right)$	$\left(0\ ,\sqrt{\frac{3}{2}}\right)$	$\left(\sqrt{\frac{3}{2}}\ ,\infty\right)$
$f''(x) = 6x + 18$	$-$	$+$	$-$	$+$
$f(x)$	محدب	مقعر	محدب	مقعر

نقاط انعطاف: 0، $\pm\sqrt{\frac{3}{2}}$

لکچر یازدهم

انتگرال

معرفی انتگرال غیر معین: تابع اولیه، انتگرال غیز معین، جدول انتگرال های بسیط به یاد آوری مشتق.

مفاهیم عمومی انتگرال غیرمعین

تابع اولیه: تابع F بنام تابع اولیه از f در انتروال $[a,b]$گفته میشود، هرگاه در تمام نقاط انتروال مذکور $F'(x)=f(x)$ باشد. یعنی $dF(x)=f(x)\,dx$، پس f مشتق تابع F و Fتابع اولیهٔ f می باشد.

مثا ل 1. توابع $F(x)=\frac{1}{3}x^2$ و $G(x)=\frac{1}{3}x^3+9$ دوتابع اولیه از $f(x)=x^2$ می باشند زیراکه

$$F'(x)=x^2=f(x)$$
$$G'(x)=x^2=f(x)$$

تعداد توابع ولیه: هرگاه F_2 و F_2 دو تابع اولیه از f در انتروال $[a,b]$باشند، پس تفاوت بین آنها یک عدد ثابت است.

ثبوت: با در نظر داشت تعریف تابع اولیه، برای هر x از $[a,b]$ داریم که

$$\left.\begin{array}{l} F_1'(x)=f(x) \\ F_2'(x)=f(x) \end{array}\right\}$$

تابع $\varphi(x)=F_1(x)-F_2(x)$ را در نظر می گیریم، اضح است که

$$\varphi'(x)=\left[F_1(x)-F_2(x)\right]'=F_1'(x)-F_2'(x)=f(x)-f(x)=0$$

چون $\varphi'(x)=0$، پس $\varphi(x)$ یک عدد ثابت است، یعنی

- $F_1(x)-F_2(x)=C$

یک تابع میتواند چندین تابع اولیه(بینهایت توابع اولیه) داشته باشدکه تفاوت بین هرجوره ازان ها فقط یکعدد ثابت است.

تعریف انتگرال غیر معین: هرگاه $F(x)$یک تابع اولیه از $f(x)$باشد، افاده $F(x)+C$ را درحالیکه C عدد ثابت اختیاری است، بنام انتگرال غیرمعین از $f(x)$ میگویند، و مینویسیم:

$$\int f(x)\,dx=F(x)+C$$

درینجا $\int$ علامت انتگرال،$f(x)$ تابع تحت انتگرال و x متحول انتگرال است. بنابرین

$$\int f(x)\,dx=F(x)+C \Leftrightarrow F'(x)=f(x)$$

نتیجه: از تعریف انتگرال غیرمعین نتیجه می شود که:

$$i.\quad \frac{d}{dx}\left(\int f(x)dx\right)=f(x)$$

$$ii.\quad d\left(\int f(x)dx\right)=f(x)dx$$

$$iii.\quad \int dF(x)=F(x)+C$$

مثال 2. انتبگرال $f(x)=x^2$ عبارت است از:

$$\int x^2dx=\frac{1}{3}x^3+C$$

انتگرال گیری توابع: انتگرال توابع بسیط رامیتوان ازفهرست مشتقات پیشبینی و معین کرد، اما بصورت عموم برای دریافت انتگرال توابع مختلف و مرکب روش های متفاوت و اختصاصی وجود دارد.

خواص اولیهٔ انتگرال غیرمعین : برا ی اعداد ثابت C و k داریم که

$$i.\quad \int 0\,dx = C$$

$$ii.\quad \int k\,dx = kx + C$$

$$iii.\quad \int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1}+C \quad , \quad n\neq -1$$

$$iv.\quad \int k\,f(x)dx = k\int f(x)dx$$

$$v.\quad \int\left[f(x)\pm g(x)\right]dx=\int f(x)dx\pm\int g(x)dx$$

مثال ها.

$$1.\quad \int xdx=\frac{x^{1+1}}{1+1}+C=\frac{x^2}{2}+C=\frac{1}{2}x^2+C$$

$$2.\quad \int\frac{dx}{\sqrt[7]{x^3}}=\int x^{-\frac{3}{7}}dx=\frac{x^{-\frac{3}{7}+1}}{-\frac{3}{7}+1}+C=\frac{x^{\frac{4}{7}}}{\frac{4}{7}}+C=\frac{7}{4}x^{\frac{4}{7}}+C$$

$$3.\quad \int x^{\frac{3}{2}}dx=\frac{x^{\frac{3}{2}+1}}{\frac{3}{2}+1}+C=\frac{x^{\frac{5}{2}}}{\frac{5}{2}}+C=\frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}}+C$$

تمرین صفحه 142

$$4.\quad \int\left(x^{3}-6x^{2}+9x+1\right)dx=\int x^{3}dx-6\int x^{2}dx+\int 9xdx+\int dx$$
$$=\int x^{3}dx+2\int xdx-\int dx=\frac{x^{4}}{4}-\frac{6x^{3}}{3}+\frac{9x^{2}}{2}+x+C$$
$$=\frac{1}{3}x^{4}-2x^{3}+x^{2}+x+C$$

انتگرال های اساسی

$$1.\ \int x^{\alpha}dx=\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}+C \quad , \quad \alpha\neq -1$$
$$2.\ \int \sin x\,dx=-\cos x+C$$
$$3.\ \int \cos x\,dx=\sin x+C\ ,$$
$$4.\ \int \frac{dx}{\sin^{2}x}=-\cot x+C$$
$$5.\ \int \frac{dx}{\cos^{2}x}=\tan x+C$$
$$6.\ \int a^{x}dx=a^{x}\ln a+C$$
$$7.\ \int e^{x}dx=e^{x}+C$$

تمرین صفحه 146

یادداشت. در بحث فوق متاسفانه انتگرال توابع مثلثاتی و نمایی هنوز مطرح نشده، درحالیکه در بحث بعدی ازان ها استفاده بعمل آمده، ازین جهت در فوق انتگرال های مذکور آورده شد.

لکچر دوازدهم

روش های انتگرال گیری تعویضی و انقسام

روش تعویضی، روش انقسام، مثال های مهم

3 انتیگرا ل گیری بروش تعویضی

اگر تابع مرکب $F\left(g\left(x\right)\right)$ را در نظر بگیریم، میدانیم که مشتق آن نظر به متحول x عبارت است از

$$\frac{d}{dx}F\left(g\left(x\right)\right) = F'_g\left(g\left(x\right)\right)g'\left(x\right)$$

بنابرین

$$\boxed{\int F'_g\left(g\left(x\right)\right)g'\left(x\right)dx = F\left(g\left(x\right)\right) + C}$$

رابطهء اخیر، اساس انتگرال گیری تعویضی را تشکیل مید هـد و اگر دران $g(x)=u$ و $F'=f$ تعویض گردد، چون $du = g'(x)dx$ است داریم که

$$\int f\left(g\left(x\right)\right)g'\left(x\right)dx = \int f\left(u\right)du = F\left(u\right)+C = F\left(g\left(x\right)\right)+C$$

لهذا درین روش، متحول تابع تحت انتگرال ازجنس یک متحول مناسب طوری عوض میشودکه انتگرال مربوط نظربه متحول جدید پیشبینی شده بتواند، بعدازدریافت انتگرال باید متحول قبلی درتابع اولیه وضع گردد.

مثال. انتگرال $\int(x^2+3x-5)^4(2x+3)dx$ را محاسبه کنید.

حل. درینجا تعویض ذیل را در نظر می گیریم.

$$\begin{cases} u = x^2+3x-5 \\ du = (2x+3)dx \end{cases}$$

بنابرین

$$1.\ \int(x^2+3x-5)^4(2x+3)dx = \int u^4du$$

$$= \frac{u^5}{5}+C = \frac{(x^2+3x-5)^5}{5}+C$$

مثال. انتگرال $\int\frac{x}{\sqrt{1-4x^2}}dx$ را دریافت کنید.

حل. تعویض ذیل را در نظر می گیریم

$$\begin{cases} u = 1 - 4x^2 \\ du = -8x\,dx \\ -\frac{1}{8}du = x\,dx \end{cases}$$

بنابرین

$$\int \frac{x}{\sqrt{1-4x^2}}dx = \int \frac{1}{\sqrt{u}}\left(-\tfrac{1}{8}\right)du = -\frac{1}{8}\int \frac{1}{\sqrt{u}}du = -\frac{1}{8}\int u^{-\frac{1}{2}}du$$

$$= -\frac{1}{8}\cdot\frac{u^{-\frac{1}{2}+1}}{-\frac{1}{2}+1}+C = -\frac{1}{8}\cdot\frac{u^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}}+C = -\frac{1}{8}\cdot 2\sqrt{u}+C = -\frac{1}{4}\sqrt{1-4x^2}+C$$

مثال. انتگرال $\int x^3\cos(x^4+2)dx$ را دریافت کنید.

حل. تعویض ذیل را در نظر می گیریم

$$\begin{cases} u = x^4 + 2 \\ du = 4x^3dx \\ \frac{1}{4}du = x^3\,dx \end{cases}$$

بنابرین

$$\int x^3\cos(x^4+2)dx = \int \cos u\cdot\tfrac{1}{4}du = \tfrac{1}{4}\int \cos u\,du$$

$$= \tfrac{1}{4}\sin u + C = \tfrac{1}{4}\sin(x^4+2)+C$$

تمرین صفحه164

انتیگرال گیری بروش انقسام (روش قسمی)

برای توابع $u = f(x)$ و $v = g(x)$ طوری که که f' و g' متمادی باشند، داریم که

$$\boxed{\int u\,dv = u\,v - \int v\,du}$$

ثبوت: با در نظر داشت قاعدۀ مشتق گیری حاصل ضرب دو تابع

$$\frac{d}{dx}[f(x)g(x)] = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$$

رابطۀ فوق را بشکل ذیل مینویسیم

$$f(x)g'(x) = \frac{d}{dx}[f(x)g(x)] - f'(x)\,g(x)$$

بنابرین تابع اولیهء سمت چپ عبارت است از

$$\int f(x)g'(x)dx = \int \frac{d}{dx}\left[f(x)g(x)\right]dx - \int f'(x)g(x)dx$$

چون $\int \frac{d}{dx}\left[f(x)g(x)\right]dx = f(x)g(x)+C$ و با تعوض آن در رابطه فوق بدون عدد ثابت می یابیم که

$$\int f(x)g'(x)\,dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)\,du$$

واضح است که $du = f'(x)dx$ و $dv = g'(x)dx$ بنابرین فور مول اصلی به اثبات رسید.

جهت تطبیق این روش، تابع تحت انتگرال بحیث حاصل ضرب دوتابع u وv طوری درنظر گرفته میشود که دران $v = \int dv$ وضاحت داشته ومحاسبه ء انتگرال $\int v\,du$ نسبت به انتگرال $\int u\,dv$ ساده ترباشد. روش انقسام در انتگرال گیری بعضی انواع مشخص توابع مور استعمال قرار می گیرد.

مثال. انتگرال $\int x \sin x\, dx$ را محاسبه کنید.

حل.

$$\begin{cases} u = x \quad \Rightarrow \quad du = dx \\ dv = \sin x\, dx \Rightarrow v = -\cos x \end{cases}$$

$$\int \underbrace{x}_{u} \underbrace{\sin x\, dx}_{dv} = \underbrace{x}_{u} \underbrace{(-\cos x)}_{v} - \int \underbrace{(-\cos x)}_{v} \cdot \underbrace{1dx}_{du} =$$

$$= -x\cos x + \int \cos x\, dx = -x\cos x + \sin x + C$$

مثال1. انتگرال $\int (-x\,e^x)dx$ را محاسبه کنید.

حل.

$$\begin{cases} u = -x \Rightarrow du = -dx \Rightarrow -du = dx \\ dv = \sin x\, dx \Rightarrow v = -\cos x \end{cases}$$

$$\int \underbrace{(-x)}_{u} \underbrace{e^x\, dx}_{dv} = \underbrace{-x}_{u}\, \underbrace{e^x}_{v} - \int \underbrace{e^x}_{v} \cdot \underbrace{(-dx)}_{du}$$

$$= -xe^x + \int e^x\, dx = -xe^x + e^x + C$$

تمرین. <u>صفحه 166</u>

لکچر سیزدهم

مشتق و انتگرال توابع نمایی و لوگارتمی

مقدمه. مشتق توابع نمایی و لوگارتمی باید در مبحث مشتق و انتگرال آن ها در بحث انتگرال غیرمعین مطرح می شد که متاسفانه در فصل جداگانه آمده اند، در حالیکه قبلا ازان ها استفاده گردیده (در روش قسمی انتگرال گیری).

مشتق و انتگرال توابع نمایی و لوگارتمی: مشتق تابع نمایی، مشتق تابع لوگارتمی، انتگرال تابع نمایی و انتگرال تابع لوگارتمی

در مشتق توابع نمایی و لوگارتمی، مشتقات $g(x)=a^x$ و $f(x)=\log_a x$ اساس قرار می گیرند.

مشتق تابع نمایی

$$f(x)=a^x \Rightarrow f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\log_a(x+h)-\log_a x}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{\log_a\frac{x+h}{x}}{h}=\lim_{h\to 0}\left[\frac{1}{h}\log_a\frac{x+h}{x}\right]=\lim_{h\to 0}\left[\frac{1}{h}\log_a\left(1+\frac{h}{x}\right)\right]$$

$$=\lim_{h\to 0}\left[\frac{1}{x}\cdot\frac{x}{h}\cdot\log_a\left(1+\frac{h}{x}\right)\right]=\lim_{h\to 0}\left[\frac{1}{x}\log_a\left(1+\frac{h}{x}\right)^{\frac{x}{h}}\right]$$

$$=\frac{1}{x}\lim_{h\to 0}\log_a\left(1+\frac{h}{x}\right)^{\frac{x}{h}}\overset{\frac{x}{h}=u}{=}\frac{1}{x}\lim_{u\to\infty}\log_a\left(1+\frac{1}{u}\right)$$

$$=\frac{1}{x}\log_a\left(1+\frac{1}{u}\right)^u=\frac{1}{x}\log_a e$$

لهذا

$$\boxed{f'(x)=\left(\log_a x\right)'=\frac{1}{x}\log_a e}$$

نتیجه. اگر در رابطه اخیر $a=e$ عوض شود داریم که

$$(\ln x)'=\left(\log_e x\right)'=\frac{1}{x}\log_e e=\frac{1}{x}$$

بنابرین

$$(\ln x)'=\frac{1}{x}$$

مثالها

$$1.\quad \ln(x^2+1)=\frac{1}{x^2+1}(x^2+1)'=\frac{2x}{x^2+1}$$

$$2.\ \ln(x^2-5x+4)=\frac{(x^2-5x+4)'}{x^2-5x+4}=\frac{2x-5}{x^2-5x+4}$$

$$3.\quad \left[l\log_a\sqrt{\frac{x^2+1}{x^2-1}}\right]'=\left[l\log_a\left(\frac{x^2+1}{x^2-1}\right)^{\frac{1}{2}}\right]'$$

$$=\left[\frac{1}{2}l\log_a\frac{x^2+1}{x^2-1}\right]'=\frac{1}{2}\left[l\log(x^2+1)-l\log_a(x^2-1)\right]'$$

$$\frac{1}{2}\left[\frac{(x^2+1)'}{x^2+1}\log_a e-\frac{(x^2-1)'}{x^2-1}\log_a e\right]$$

$$=\frac{\log_a e}{2}\left[\frac{2x}{x^2+1}-\frac{2x}{x^2-1}\right]=\frac{-2x}{x^4-1}\log_a e$$

اگر در سوال 3 تعویض $a=e$ تطبیق گردد داریم که

$$4.\quad \left[\ln\sqrt{\frac{x^2+1}{x^2-1}}\right]'=\left[l\log_e\left(\frac{x^2+1}{x^2-1}\right)^{\frac{1}{2}}\right]' \Rightarrow$$

$$\frac{-2x}{x^4-1}\log_a e=\frac{-2x}{x^4-1}\cdot 1=\frac{-2x}{x^4-1}$$

مشتق گیری با کاربرد لوگارتم طبیعی. توابع بحیث حاصل ضرب یا تقسیم و نمایی را میتوان با کاربرد لوگارتم طبیعی مشتق گرفت. در روش از اطراف رابطه $y=f(x)$ لوگارتم گرفته با استفاده از خواص لوگارتم تابع ساده می شود و بعدا اطراف رابطه را شبیه تابع ضمنی مشتق می گیریم.

مشتق تابع نمایی. مشتق تابع $y=a^x$ را با کار برد لوگارتم قرار ذیل دریافت می کنیم

$$y=a^x\Rightarrow \ln y=\ln a^x\Rightarrow \ln y=x\ln a\Rightarrow(\ln y)'=(x\ln a)'$$

$$\Rightarrow\frac{y'}{y}=\ln a\Rightarrow y'=y\ln a=a^x\ln a$$

یعنی

$$(a^x)'=a^x\ln a$$

با تعویض $a=e$ در رابطه اخیر می یابیم که

$$(e^x)'=e^x$$

مثال ها

$$4.\ y=e^{x^2+1}\Rightarrow y'=e^{x^2+1}(x^2+1)'\Rightarrow y'=2xe^{x^2+1}$$

$$5.\ y=2^{\frac{1}{x}}\Rightarrow y'=(2^{\frac{1}{x}})'=2^{\frac{1}{x}}(\ln 2)\left(\frac{1}{x}\right)'=2^{\frac{1}{x}}\left(-\frac{1}{x^2}\right)\ln 2$$

$$6.\ y=10^x\Rightarrow y'=(10^x)'=10^x\ln 10$$

$$7.\ y=e^{3x}\Rightarrow y'=(e^{3x})'=e^{3x}(3x)'=3e^{3x}$$

انتگرال گیری توابع نمایی . با استفاده از مشتق تابع نمایی میتوان نوشت

$$(a^x)'=a^x\ln a\Rightarrow\frac{(a^x)'}{\ln a}=a^x$$

$$\Rightarrow\int a^x dx=\int\frac{(a^x)'}{\ln a}dx=\frac{1}{\ln a}\int(a^x)'dx=\frac{1}{\ln a}a^x+C$$

بنابرین

$$\boxed{\int a^x dx=\frac{a^x}{\ln a}+C}$$

درینجا نیز اگر $a=e$ مد نظر گیریم میابیم که

$$\boxed{\int e^x dx=e^x+C}$$

انتگرال توابع لوگارتمی. به کمک روش انقسام داریم

$$\int\ln x\,dx=\int\underbrace{\ln x}_{u}\cdot\underbrace{1\cdot dx}_{dv}=\ln x\cdot x-\int\tfrac{1}{x}\cdot x\,dx$$

$$=x\ln x-\int dx=x\ln x-x+C=x(\ln x-1)+C$$

$$=x(\ln x-\ln e)+C=x\ln\tfrac{x}{e}+C$$

$$\boxed{\int\ln x\,dx=x(\ln x-1)+C=x\ln\tfrac{x}{e}+C}$$

به همین قسم

$$\int \log_a x\,dx$$
$$= \int \underbrace{\log_a x}_{u} \cdot \underbrace{1 \cdot dx}_{dv} = \log_a x \cdot x - \int \tfrac{1}{x}(\log_a e)\,x\,dx \Rightarrow$$
$$x\log_a x - \log_a e \int dx = x\log_a x - x\log_a e + C \Rightarrow$$
$$x(\log_a x - \log_a e) + C = x\log_a \tfrac{x}{e} + C$$

$$\boxed{\int \log_a x\,dx = x\log_a \tfrac{x}{e} + C}$$

مثال.

$$\int \ln 3x\,dx = \int \ln 3 + \ln x\,dx = x\ln 3 + x\ln x - x + C$$
$$= x(\ln 3 + \ln x - 1) + C = x(\ln 3x - 1) + C$$

مثال1. ص192

$$a)\quad \int e^{-2x-3}dx = \begin{bmatrix} u = -2x - 3 \\ du = -2dx \Rightarrow -\tfrac{du}{2} = dx \end{bmatrix} = \int e^{u}\left(-\tfrac{du}{2}\right)$$
$$= -\tfrac{1}{2}\int e^{u}du = -\tfrac{1}{2}e^{u} + C = -\tfrac{1}{2}e^{-2x-3} + C$$

$$b)\quad \int \frac{2dx}{x+2} = \begin{bmatrix} u = x + 2 \\ du = dx \end{bmatrix} = \int \frac{2du}{u}$$
$$= 2\ln|u| + C = 2\ln|x+2| + C$$

مثال2. ص193

$$a)\quad \int e^{2x}dx = \begin{bmatrix} u = 2x \\ du = 2dx \Rightarrow \tfrac{du}{2} = dx \end{bmatrix}$$
$$= \tfrac{1}{2}\int e^{u}du = \tfrac{1}{2}e^{u} + C = \tfrac{1}{2}e^{2x} + C$$

مثال 3. انتگرال $f(x) = x\ln x^2$ را محاسبه کنید.

لکچر چهاردهم

مشتق گیری به کمک معکوس توابع

رابطه بین مشتق تابع و مشتق معکوس آن، مشتق گیری توابع مثلثاتی معکوس، مشتق گیری توابع نمای.

مشتق گیری بعضی توابع به کمک تابع معکوس آنها روش مفید و مناسب است، این روش برای مشتق گیری توابع مثلثاتی معکوس لازمی است.

اگر f و g دو تابع معکوس همدیگر باشند، درانصورت با در نظر داشت مشتق تابع تابع (قاعدهٔ زنجیره ای) میتوانیم بنویسیم که

$$\left.\begin{array}{l} y=f(x) \\ x=g(y) \end{array}\right\} \Rightarrow y'_x \cdot x'_y = y'_y \Rightarrow y'_x \cdot x'_y = 1 \Rightarrow y'_x = \frac{1}{x'_y}$$

فورمول $y'_x = \frac{1}{x'_y}$ به عبارت دیگر $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}}$ اساس مشتق گیری با کابرد معکوس تابع را تشکیل می دهد.

مشتق تابع نمایی.

$$\left.\begin{array}{l} y = a^x \\ x = \log_a y \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{cases} (a^x)' = y'_x = \dfrac{1}{x'_y} = \dfrac{1}{(\log_a y)'_y} \\ = \dfrac{1}{\frac{1}{x}\log_a e} = \dfrac{\log_e a}{\frac{1}{x}} = \dfrac{\ln a}{\frac{1}{x}} = x \ln a \end{cases}$$

یعنی

$$\boxed{(a^x)' = a^x \ln a}$$

برای $a=e$ از رابطه فوق دریافت می گردد که

$$\boxed{(e^x)' = a^x}$$

مشتق تابع معکوس ساین

$$\left.\begin{array}{l} y = \arcsin x \\ x = \sin y \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{cases} (\arcsin x)' = y'_x = \dfrac{1}{x'_y} = \dfrac{1}{(\sin y)'_y} \\ = \dfrac{1}{\cos y} = \dfrac{1}{\sqrt{1-\sin^2 y}} = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}} \end{cases}$$

بنابرین

$$\boxed{(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}}$$

مشتق تابع معکوس کو ساین

$$\left.\begin{aligned} y &= \arccos x \\ x &= \cos y \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{cases} (\arccos x)' = y'_x = \dfrac{1}{x'_y} = \dfrac{1}{(\cos y)'_y} \\ = \dfrac{1}{-\sin y} = \dfrac{-1}{\sqrt{1-\cos^2 y}} = \dfrac{-1}{\sqrt{1-x^2}} \end{cases}$$

بنابرین

$$\boxed{(\arccos x)' = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}}$$

مشتق تابع معکوس تانجنت

$$\left.\begin{aligned} y &= \arctan x \\ x &= \tan y \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{cases} (\arctan x)' = y'_x = \dfrac{1}{x'_y} = \dfrac{1}{(\tan y)'_y} \\ = \dfrac{1}{\frac{1}{\cos^2 y}} = \cos^2 y = \dfrac{\cos^2 y}{1} = \dfrac{\cos^2 y}{\cos^2 y + \sin^2 y} \\ = \dfrac{\frac{\cos^2 y}{\cos^2 y}}{\frac{\cos^2 y}{\cos^2 y} + \frac{\sin^2 y}{\cos^2 y}} = \dfrac{1}{1+\tan^2 y} = \dfrac{1}{1+x^2} \end{cases}$$

بنابرین

$$\boxed{(\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2}}$$

دریافت مشتق معکوس کوتنجنت بحیث تمرین

مثال1. مشتق $y = (\arctan x)^5$ را دریافت کنید.

حل

مثال2. $y = (\arctan x)^5 \Rightarrow y' = 5(\arctan x)^4 (\arctan x)' = 5(\arctan x)^4 \dfrac{1}{1+x^2}$

مشتق $y = \log_5(\arctan x)$ را دریافت کنید.

حل

$$y' = \left[\log_5(\arctan x)\right]' = \frac{(\arctan x)'}{(\arctan x)\ln 5} = \frac{\frac{1}{1+x^2}}{(\arctan x)\ln 5}$$

مثال3. مشتق $y = \arctan e^x$ را دریافت کنید.

حل

$$y' = (\arctan e^x)' = \frac{1}{1+(e^x)^2}(e^x)' = \frac{e^x}{1+e^{2x}}$$

$$\Rightarrow y'(0) = \frac{e^0}{1+e^{20}} = \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}$$

تمرین <u>صفحه 184</u>

توابع مثلثاتی معکوس بحیث انتگرال

1. $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C$

2. $\int \frac{dx}{1+x^2} = \arctan x + C$

لکچر پانزدهم

انتگرال معین

انقسام و مجموع ریمان، انتگرال معین بحیث لیمت مجموع ریمان، انتگرال معین بحیث تفاضل قیمت های سرحدی تابع اولیه، روش های تعویضی و انقاسم در انتگرال معین

تعریف انتگرال معین: هـرگاه $f(x)$ یک تابع متمادی درانتروال بستهٔ $[a\,,b]$ تعریف شده ، ترادف اعداد حقیقی x_n برای $(n=0,1,2,\cdots,n)$ ازین انتروال باشند طوریکه

$i.\quad a=x_0<x_1<x_2<\ldots<x_{n-1}<x_n=b$

$ii.\quad \Delta x_k=x_k-x_{k-1},\ k=1,2,3,\ldots,n$

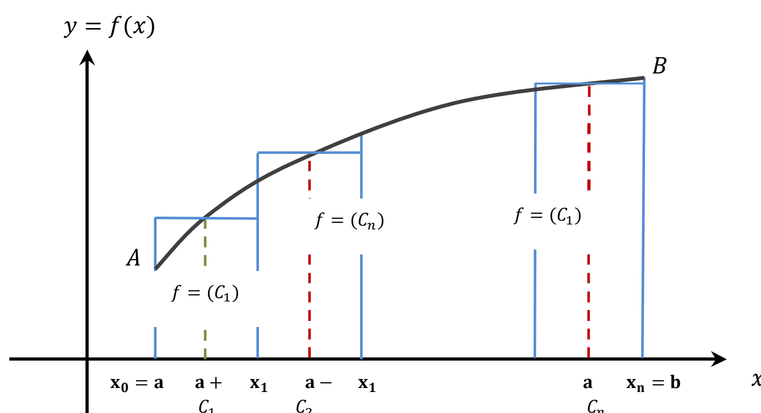
$iii.\quad \Delta x_k\to 0 \Leftrightarrow n\to\infty$

$iv.\quad x_{k-1}\le c_k\le x_k\ ,\ k=1,2,3,\ldots,n$

درینصورت انتگرال معین $f(x)$ از a تا b عبارت است از

$$\int_a^b f(x)dx=\lim_{n\to\infty}\left[f(c_1)\Delta x_1+f(c_2)\Delta x_2+\cdots+f(c_n)\Delta x_n\right]=\sum_{k=1}^{\infty}f(c_k)\Delta x_k$$

ا اعدا د a و b به ترتیب حدود تحتانی وفوقانی ازتابع تحت انتگرال گفته میشوند و افادهٔ $\sum_{k=1}^{n}f(c_k)\Delta x_k$ رابنام مجموعهٔ ریمان یاد میکنند(شکل12.4)



شکل12.4

اگرتابع $f(x)$ درانتروال $[a\,,b]$دارای قیمت های منفی نبوده و متمادی باشد از نظر هندسی انتگرال $\int_a^b f(x)\,dx$ مساوی بامساحت سطحیست که بین منحنی $y=f(x)$ و محور x درمسافه $x=a$ تا $x=b$ محصورمیباشد.

مثال 1. انتگرال معین $\int_0^3 4x\,dx$ رامحاسبه کنید.

حل. تابع تحت انتگرال $f(x)=4x$ و انتروال مربوط $[0,3]$ است، درینجا جهت آسانی

$$\Delta x_1=\Delta x_2=\Delta x_3=\cdots=\Delta x_n=\Delta x=\tfrac{3-0}{n}=\tfrac{3}{n}$$

در نظر می گیریم، ترادف c_n قرار ذیل انتخاب می شود

$$\begin{aligned}
&c_1=\Delta x=\tfrac{3}{n} &&\Rightarrow f(c_1)=4c_1=4\left(\tfrac{3}{n}\right)\\
&c_2=2\Delta x=2\times\tfrac{3}{n} &&\Rightarrow f(c_2)=4c_2=4\left(2\times\tfrac{3}{n}\right)\\
&c_3=3\Delta x=3\times\tfrac{3}{n} &&\Rightarrow f(c_3)=4c_3=4\left(3\times\tfrac{3}{n}\right)\\
&\cdots\\
&c_k=k\,\Delta x=k\times\tfrac{3}{n} &&\Rightarrow f(c_k)=4c_k=4\left(k\times\tfrac{3}{n}\right)
\end{aligned}$$

با استفاده از مجموع ریمان داریم که

$$\int_0^3 f(x)dx=\lim_{n\to\infty}\left[f(c_1)\Delta x_1+f(c_2)\Delta x_2+\cdots+f(c_n)\Delta x_n\right]$$

بنابرین

$$\begin{aligned}
\int_0^3 4x dx&=\lim_{n\to\infty}\left[4\left(\tfrac{3}{n}\right)\tfrac{3}{n}+4\left(2\cdot\tfrac{3}{n}\right)\tfrac{3}{n}+\cdots+4\left(n\cdot\tfrac{3}{n}\right)\tfrac{3}{n}\right]\\
&=\lim_{n\to\infty}\left[\tfrac{36}{n^2}(1+2+3+\cdots+n)\right]=\lim_{n\to\infty}\left[\tfrac{36}{n^2}\cdot\tfrac{n(n+1)}{2}\right]\\
&=\lim_{n\to\infty}\left[\tfrac{36}{2}\cdot\tfrac{n+1}{n}\right]=18\lim_{n\to\infty}\tfrac{n+1}{n}=18\cdot 1=18
\end{aligned}$$

در نتیجه به دست آمد $\int_0^3 4x\,dx=18$.

خواص انتگرال معین. برای توابع متمادی f، g و عدد ثابت k داریم که

$$I\qquad \int_a^b k dx=k(b-a)$$

$$II.\quad \int_a^b kf(x)dx=k\int_a^b f(x)dx\quad,\quad k=const.$$

$$III.\quad \int_a^b\left[f(x)\pm g(x)\right]dx=\int_a^b f(x)dx\pm\int_a^b g(x)dx$$

$$IV.\quad \int_a^b f(x)dx=\int_a^c f(x)dx+\int_c^b f(x)dx\quad,\quad a<b<c$$

قضیهء اساسی انتگرال: هرگاه $f(x)$ تابع متمادی درانتروال بستهء $[a\,,b]$ بوده و $F(x)$ یک تابع اولیه از $f(x)$ باشد، پس

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(x)\Big|_a^b = F(b)-F(a) \quad , \quad F'(x)=f(x)$$

این قضیه انتگرال های معین و غیرمعین را بهمدیگر مربوط مینماید که محاسبهٔ انتگرال معین راساده میسازد.

مثال ها

$$2.\ \int_{-1}^{2} x^2 dx = \left[\frac{x^3}{3}\right]_{-1}^{2} = \frac{2^3}{3}-\frac{(-1)^3}{3} = \frac{8}{3}-\left(-\frac{1}{3}\right)=3$$

$$3.\ \int_0^{\pi} \sin x\ dx = -\cos x\Big|_0^{\pi} = -\cos\pi-(-\cos 0) = -(-1)-(-1)=2$$

$$4.\ \int_0^4 e^x dx = [e^x]_0^4 = e^4-e^0 = e^4-1$$

$$5.\ \int_1^e \left(1+2x-\tfrac{1}{x}\right)dx = [x+x^2-\ln x]_1^e = (e+e^2-\ln e)-(1+1^2-\ln 1)$$
$$= (e+e^2-1)-(1+1^2-0) = e+e^2-3$$

روش انقسام در انتیگرال معین

مشابه انتگرال گیری بروش انقسام دربحث انتگرال غیرمعین، برای انتگرال معین نیز دستور ذیل وجود دارد.

$$\int_a^b u(x)\,v'(x)\,dx = u(x)\,v(x)\Big|_a^b - \int_a^b v(x)\,u'(x)\,dx$$

مثال2. <u>ص194</u>

$$\int_0^1 x\ e^x dx = \left[-xe^x\right]_0^1 - \int_0^1 e^x dx = -e+\left[-e^x\right]_0^1 = 1-2e$$

تعـویض متحول درانتگرال معین

اگردرانتگرال معین $\int_a^b f(g(x))g'(x)\,dx$ تعویض $u=g(x)$ رادرنظرگیریم، پس $du=g'(x)dx$ بوده، درینصورت داریم که

$$\int_a^b f(g(x))g'(x)\,dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(u)\,du$$

مثال1. انتگرال $\int_{-1}^{1} e^{2x}\,dx$ راحساب کنید. ص193

حل. اگر $u = g(x) = 2x$ وضع کنیم $du = 2dx$، $g(-1) = -2$ و $g(1) = 2$ است، بنابرین

$$\int_{-1}^{1} e^{2x}dx = \begin{bmatrix} u = 2x \Rightarrow \frac{du}{2} = dx \\ x = -1 \Rightarrow u = -2 \\ x = 1 \Rightarrow u = 2 \end{bmatrix} = \frac{1}{2}\int_{-2}^{2} e^{u}du = \frac{1}{2}e^{u}\Big|_{-2}^{2} = \frac{1}{2}\left[e^{2} - e^{-2}\right]$$

مثال2.

$$\int_{1}^{2} 2x\ln x^{2}\,dx = \begin{bmatrix} u = g(x) = x^{2} \\ du = 2xdx \\ g(1) = 1,\ g(2) = 4 \end{bmatrix} = \int_{1}^{4} \ln u\,du = u(\ln u - 1)\Big|_{1}^{4}$$

$$= 4(\ln 4 - 1)\Big| - 1(\ln 1 - 1)\Big| = 4(\ln 4 - 1)\Big| + 1$$

لکچرشانزدهم

استفاده از انتگرال معین

کاربرد انتگرال معین در محاسبه سطوح، احجام دورانی و طول منحنی

محاسبه مساحت بین گراف تابع و محور افقی

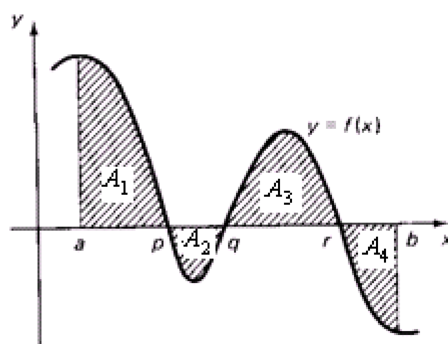
حالت اول. هرگاه تابع متمادی f در انتروال $[a, b]$دارای قیمت های منفی نباشند یعنی برای هر x از $[a, b]$ نامساوات $f(x) \geq 0$ صدق کند، پس مساحت سطحی که بین منحنی $y = f(x)$ و محور x با خطوط $x = a$ و $x = b$ احاطه می گردد(شکل 12.7)، عبارت است از

$$A = \int_a^b f(x) dx$$

حالت دوم. اگر تابع متمادی f در انتروال $[a, b]$ قیمت های مثبت نداشته باشد یعنی برای هر x از $[a, b]$ نامساوات $f(x) \leq 0$ صدق کند، درینصورت مساحت سطح بین منحنی $y = f(x)$ و محور x(شکل12.6) با خطوط $x = a$ و $x = b$ عبارت است از

$$A = -\int_a^b f(x) dx$$

حالت سوم. در صورتیکه تابع f در یک انتروال به تعداد محدودی اشاره اش را عوض نماید، در فواصلی که اشارهٔ منفی داشته باشد، $-f(x)$ را و درفواصلی که اشارهٔ مثبت دارد $+f(x)$ را انتگرال گرفـته، از مجموع آن ها مساحت سطع مورد نظر حساب می گردد



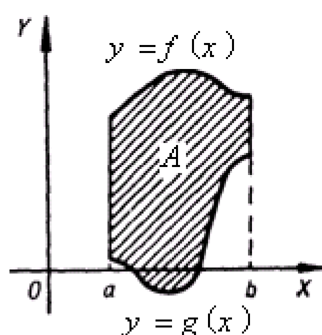
مثلاً برای حالت مطابق شکل فوق داریم که

$$A = A_1 + A_2 + A_3 + A_4 = \int_a^p f(x) dx - \int_p^q f(x) dx + \int_q^r f(x) dx - \int_r^b f(x) dx$$

محاسبه مساحت بین دو گراف

مساحت سطحی که بین گراف های توابع $y=f(x)$, $y=g(x)$ در انتروال $[a\,,b]$ محصور می گردد مشروط بر اینکه $f(x)\geq g(x)$ باشد عبارت است از

$$A=\int_a^b [f(x)-g(x)]\,dx$$



مثال1. مساحت سطحی را محاسبه کنید که بین منحنی $x=4-y^2$ و محور y احاطه می شود ص202.

مثال2. مساحت سطحی را محاسبه کنید که بین منحنی $y=1-\frac{1}{2}x^2$ و محور x احاطه می شود ص202.

مثال3. مساحت سطحی را محاسبه کنید که بین منحنی $y=x^2-3$ و محور x احاطه می شود ص203.

مثال4. مساحت سطحی را محاسبه کنید که بین منحنی $y=x^2-3x$ و محور x در انتروال $[-1,4]$ احاطه می شود ص204.

مثال5. مساحت سطحی را محاسبه کنید که بین منحنی $y=x^2-2x$ و محور x در انتروال $[-1,2]$ احاطه می شود ص205.

مساحت بین دو منحنی

1. مساحت سطحی را محاسبه کنید که بین منحنی های $y=2x-x^2$ و $y=x^2$ احاطه می شود ص208.

2. مساحت سطحی را محاسبه کنید که بین منحنی $y=x^2-6x+2$ و خط $y=2-x$ احاطه می شود ص208.

3. مساحت سطحی را محاسبه کنید که بین منحنی های $y=-x^2+4x+2$ و $y=x^2-2x+2$ احاطه می شود ص208.

محاسبه سطح و حجم اجسام دورانی: سطحی را در نظر می گیریم که بین گراف تابع متمادی $y=f(x)$ و محور x در انتروال $[a\,,b]$ محاط باشد (شکل12.15)، اگر این سطح بحول محور x در فضاً یک دوران مکمل نماید، جسم دورانی بوجود می آید. که مساحت (S) و حجم (V) ازان عبارت اند از

$$S=2\pi\int_a^b y\sqrt{1+\left(\tfrac{dy}{dx}\right)^2}dx\ ,\ V=\pi\int_a^b\left[f(x)\right]^2dx$$

مثال1. حجم کره ص214

از دوران نیم دایرهٔ $x^2+y^2=r^2$ به حول محور x در انتروال $[-r\ ,\ r]$ کره به وجود می آید.

$$V=\int_{-r}^{r}\pi y^2dx=\left[y^2=r^2-x^2\right]=\int_{-r}^{r}\pi\left(r^2-x^2\right)dx=2\pi\int_0^r\left(r^2-x^2\right)dx$$
$$=2\pi\left[r^2x-\tfrac{1}{3}x^3\right]_0^r=2\pi\left[\left(r^2r-\tfrac{1}{3}r^3\right)-\left(r^20-\tfrac{1}{3}0^3\right)\right]=2\pi\left(r^3-\tfrac{1}{3}r^3\right)$$
$$=2\pi\tfrac{2}{3}r^3=\tfrac{4}{3}\pi r^3$$

مثال 2. حجم مخروط ص214

حجم مخروطی که شعاع قاعده اش r و ارتفاع آن h باشد، عبارت است از

$$V=\pi r^2\tfrac{h}{3}=S\ \tfrac{h}{3}$$

ثبوت. از دوران خط مستقیم $y=\tfrac{r}{h}x$ در انتروال $[0,h]$مخروط مذکور به دست می آید، پس

$$V=\pi\int_0^h y^2dx=\pi\int_0^h\left(\tfrac{r}{h}x\right)^2dx=\pi\tfrac{r^2}{h^2}\int_0^h x^2dx$$
$$=\pi\tfrac{r^2}{h^2}\tfrac{x^3}{3}\Big|_0^h=\pi\tfrac{r^2}{h^2}\tfrac{h^3}{3}=\pi r^2\tfrac{h}{3}=S\ \tfrac{h}{3}$$

مثال3. حجم الپسوئید ص214

$$V=\tfrac{4}{3}\pi a^2b=\tfrac{4}{3}\pi ab^2$$

ثبوت. در اثر دوران منحنی $\tfrac{x^2}{a^2}+\tfrac{y^2}{b^2}=1$ به حول محور x الپسوئید به وجود می آید، پس

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\Rightarrow\frac{y^2}{b^2}=1-\frac{x^2}{a^2}\Rightarrow y^2=b^2\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)\Rightarrow y^2=\frac{b^2}{a^2}(a^2-x^2)$$ بنابرین حجم مورد نظر عبارت است از

$$V=\pi\int_{-a}^{a}y^2dx=\pi\int_{-a}^{a}\frac{b^2}{a^2}(a^2-x^2)dx=2\pi\int_0^a\frac{b^2}{a^2}(a^2-x^2)dx$$
$$=2\pi\frac{b^2}{a^2}\int_0^a(a^2-x^2)dx=2\pi\frac{b^2}{a^2}\left[a^2x-\frac{x^3}{3}\right]_0^a=2\pi\frac{b^2}{a^2}\left[a^3-\frac{a^3}{3}\right]\ \boxed{V=\frac{4}{3}\pi ab^2}$$
$$=2\pi\frac{b^2}{a^2}\frac{2a^3}{3}=\frac{4}{3}\pi ab^2$$

مثال2. حجم جسمی را که در اثر دوران منحنی $y=\sqrt{2x}$ به دور محور x در انتروال $[0\,,3]$ بوجود می آید، محاسبه کنید. شکل ص215

حل: طبق دستور حجم جسم داده شده عبارت است از

$$V=\pi\int_a^b y^2dx=\pi\int_0^3\left[\sqrt{2x}\right]^2dx=\pi\int_0^3 2x\,dx$$
$$=2\pi\int_0^3 x\,dx=2\pi\left[\tfrac{x^2}{2}\right]_0^3=2\pi\left(\tfrac{9}{2}\right)=9\pi$$

محاسبه طول منحنی ها: طول منحنی $y=f(x)$ که بین دو نقطهٔ $x=a$ تا $x=b$ محدود باشد، عبارت است از

$$l=\int_a^b\sqrt{1+\left(\tfrac{dy}{dx}\right)^2}\;dx$$

و اگر منحنی ذریعه معادلات پارامتریک $x=f(t)$ و $y=g(t)$ داده شده باشد، طول منحنی بین دو نقطهٔ $x=a$ تا $x=b$ عبارت است از

$$l=\int_a^b\sqrt{\left(\tfrac{dx}{dt}\right)^2+\left(\tfrac{dy}{dt}\right)^2}\;dx=\int_a^b\sqrt{[f'(t)]^2+[g'(t)]^2}\;dx$$

یادداشت. فورمول اخیر از ارائه پارامتریک منحنی ها استفاده شده در حالیکه این موضوع در پروگرام مکتب مطرح نشده بنابرین از سویه معمولی شاگردان خارج است

محاسبه محیط دایره.

دایرهٔ با شعاع r دارای معادله $x^2+y^2=r^2$ در مختصات قایم است، اما معادلات پارامتریک آن $\begin{cases}x=r\cos t\\ y=r\sin t\end{cases}$ می باشد، طول نصف محیط دایره عبارت است از

$$l=\int_0^\pi\sqrt{[x'(t)]^2+[y'(t)]^2}dt=\int_0^\pi\sqrt{\left[(r\cos t)'\right]^2+\left[(r\sin t)'\right]^2}dt$$
$$=\int_0^\pi\sqrt{[r(-\sin t)]^2+[r\cos t]^2}dt=r\int_0^\pi\sqrt{\sin^2t+\cos^2t}\,dt=r\int_0^\pi dt$$
$$=rt\big|_0^\pi=\pi r$$

لهذا طول نصف محیط محیط دایر πr و دو چند آن طول محیط دایر می باشد یعنی

$$\boxed{C=2\pi r}$$

ارتباط مفاهیم احتمالات و احصائیه

قبل ازاینکه ارتباط مفاهیم احتمالات را در احصائیه مطالعه نمایم در مرحله اول بعضی مفاهیم مقدماتی احتمالات را مورد بررسی قرار داده و سپس به مطالعه احتمالات می پردازیم و سپس ارتباط مفاهیم احتمالات و احصائیه می بنیم.

حوادث اتفاقی: حوادث که وقوع یا عدم وقوع آنها قابل پیشگوی قطی نبوده و به عوامل مربوط گردند که خارج از کنترول و نظارت ما باشند بنام حوادث اتفاقی یاد میگردند. مثلاً اگر یک سکه کاملاً متجانس را بدون تمایلات شخصی به بالا پرتاب نمائیم تا وقتیکه سکه روی سطح زمین قرار نگرفته بصورت قطعی پیشگوی کرده نمیتوانیم که سکه شیر خواهد آمد یا خط، پس دراین جا دو حادثه اتفاقی وجود دارد شیر آمدن وخط آمدن سکه.

تجربه: هر عمل یا واقعه بیطرفانه، قابل تکرار که باعث ایجاد حوادث اتفاقی میگردد تجربه نامیده میشود. مثلاً انداختن یک سکه متجانس بدون تمایلات شخصی بالای سطح زمین جهت کدام نتیجه گیری خاص یک تجربه است.

حالات ممکنه یک تجربه: هر تجربه متشکل از یک تعداد حالات میباشد که وقوع تنها یکی از آنها حتمی میباشد، چنین حالات را بنام حالات ممکنه یک تجربه باد مینمایند. مثلاً در انداختن یک سکه متجانس دو حالت ممکنه وجود دارد، شیر آمدن سکه و خط امدن سکه پر تاب شده.

حالات مساعد: هر حادثه اتفاقی در یک تجربه متشکل از یک تعداد حالات ممکنه این تجربه میباشد و چنین حالات را که ظاهر شدن هر یک از آنها باعث وقوع حادثه میگردد بنام حالات مساعد این حادثه اتفاقی یاد میگردد. مثلاً در انداختن یک سکه متجانس شیر آمدن یک سکه حادثه اتفاقی است، دراین تجربه دو حالت ممکنه (شیرو خط) وجود دارد و یک حالت مساعد برای حادثه شیر آمدن سکه وجود دارد که شیر آمدن سکه پرتاب شده میباشد.

حالات ممکنه متساوی الاحتمال: حالات ممکنه یک تجربه را متساوی الاحتمال میگوید. درصورتیکه با بررسی کلیه جوانب این تجربه نتوان دلیلی پیداکرد که امکان وقوع یکی از این حالات بیشتر از دیگر آن باشد. مثلاً در تجربه انداختن یک سکه متجانس دو حالت ممکنه متساوی الاحتمال (شیر آمدن و خط آمدن سکه) وجود دارد.

تعریف احتمال: اگر دریک تجربه محدود تعداد حالات ممکنه آن n و برای یک حادثه اتفاقی مشخص A حالات مساعد آن m باشد پس احتمال وقوع حادثه اتفاقی A که بشکل $P(A)$ نشان داده میشود بشکل ذیل تعریف میگردد:

$$P(A) = \frac{\text{تعداد حالات مساعد حادثه اتفاقی} A}{\text{تعداد حالات ممکنه تجربه}} = \frac{m}{n}$$

مثلاً در تجربه اندختن یک سکه متجانس احتمال خط آمدن آن قرار ذیل است.

A : حادثه اتفاقی خط آمدن سکه در اثر انجام تجربه انداختن یک سکه:

$$P(A) = \frac{m}{n} = \frac{1}{2}$$

فضای نمونه یک تجربه:

فضایی نمونه یک تجربه عبارت از یک ست S است، طوریکه هر یک از حالات ممکنه تجربه فقط به یک عنصر این ست مطابقت داشته باشد.

عناصر ست S را نقاط نمونه فضایی تجربه مینامندو مثلاً فضایی نمونه تجربه انداختن دو سکه، طوریکه شیر آمدن سکه را توسط صرف H و خط آمدن سکه را توسط صرف T نمایش میدهیم عبارت است از:

$$S = \{HH \ , HT , TH , TT\}$$

تعریف متحول تصادفی:

تابع حقیقی x از فضایی نمونه S در ست اعداد $\mathbb{R}$ را متحول تصادفی مینامند طوریکه اصل هر انتروال اعداد حقیقی یک حادثه تصادفی در S باشد.

و یا متحولی که قیمت های ممکنه آن اعداد حقیقی مشخص کننده حوادث اتفاقی حاصل از یک تجربه باشد بنام متحول تصادفی یاد میشود که توسط حروف بزرگ الفبا مانند $X , Y , Z , \cdots$ و قیمت های ممکنه آن توسط حروف کوچک الفبا مانند $x , y , z , \cdots$ نمایش داده میشود.

مثلاً اگر یک سکه را ده دفعه به منظور شیر آمدن پرتاب نمائیم در اینصورت اگر ظهور شیر ها را در این تجربه به متحول تصادفی X نشان دهیم پس قیمت های ممکنه آن عبارت است از

$$x = 0,1,2,3,4,5,6,7,8,9,10$$

تعریف: یک متحول تصادفی X که قیمت های ممکنه آن عدد حقیقی محدود مانند

$$x_1 \ , \ x_2 \ , \ \dots \ x_n$$

یا اعداد حقیقی غیر محدود قابل شمارش مانند $x_1 \ , \ x_2 \ , \ \dots$ باشد بنام متحول تصادفی مجزا یاد میشود. مثلاً بروز تعداد شیرها در تجربه پرتاب سکه متجانس.

تعریف: فرضاً X یک متحول تصادفی مجزا باشد دراینصورت ست جوره های $(x \ , f(x))$ را تابع احتمال تصادفی مجزا X با قیمت های ممکنه x گویند طوریکه:

$1. f(x) \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

$2. \sum_{x} f(x) = 1$

$3. \ P(X = x) = f(x)$

مثال: تابع احتمال تجربه پرتاب سه سکه را در نظر تعداد شیرها بررسی نمائید.

حل: فضایی نمونه انداختن سه سکه است از:

$$S = \{HHH\ , HTH\ , HHT\ , THH\ , TTT\ , TTH\ , THT\ , HTT\}$$

دیده میشود که S دارای 8 تقطه نمونه است پس عدد $\frac{1}{8}$ را بحیث احتمال وقوع هریک از حوادث تصادفی نسبت میدهیم.

نتیجه تجربه از نظر تعداد شیرها وقوع یکی از حوادث تصادفی آمدن تعداد $2 , 1 , 0$ و 3 شیر میباشد پس تابع احتمال تجربه متذکره عبارت است از:

$$f = \left\{\left(0\ , \frac{1}{8}\right), \left(1 , \frac{3}{8}\right), \left(2\ , \frac{3}{8}\right), \left(3\ , \frac{1}{8}\right)\right\}$$

تعریف: فرضاً X یک متحول تصادفی مجزا باقیمت های ممکنه $x_1\ , x_2\ , \dots\ , x_n$ باشد ست جوره های مرتب

$$F = \left\{\left(0\ , \frac{1}{8}\right), \left(1 , \frac{3}{8}\right), \left(2\ , \frac{3}{8}\right), \left(3\ , \frac{1}{8}\right)\right\}$$

را بنام تابع توزیع احتمال یاد میکنند و $F = (x_i) = P(X \le x_i)$.

مثال: در تجربه انداختن سه سکه تابع احتمال و تابع توزیع احتمال تعداد شیرها را مشخص سازید.

حل: تابع احتمال تجربه انداختن سه سکه از نظر تعداد شیرها عبارت از

$$f(x) = \binom{3}{i}\left(\frac{1}{2}\right)^3_6 \quad i = 0,1,2,3$$

که جدول قیمت های آن قرار ذیل است.

x	0	1	2	3
$f(x)$	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$

حال قیمت های تابع توزیع احتمال F را زیلاً بدست میاوریم.

$$F(x_i) = P(X \le x_i)$$

$$F(0)=P(X\le 0)=f(0)=\frac{1}{8}$$

$$F(1)=P(X\le 1)=f(0)+f(1)=\frac{1}{8}+\frac{3}{8}=\frac{4}{8}$$

$$F(2)=P(X\le 2)=f(0)+f(1)+f(2)=\frac{1}{8}+\frac{3}{8}+\frac{3}{8}=\frac{7}{8}$$

$$F(3)=P(X\le 3)=f(0)+f(1)+f(2)+f(3)=\frac{1}{8}+\frac{3}{8}+\frac{3}{8}+\frac{1}{8}=\frac{8}{8}=1$$

و

$$F(x) = \begin{cases} 0 & , \quad x<0 \\ \frac{1}{8} & , \quad 0\le x<1 \\ \frac{4}{8} & , \quad 1\le x<2 \\ \frac{7}{8} & , \quad 2\le x<3 \\ 1 & , \quad x\ge 3 \end{cases}$$

تعریف: یک متحول تصادفی X را متحول تصادفی متمادی گویند در صورتیکه تمام قیمت های ممکنه یک انتروال اعداد حقیقی $[a,b], a \not\subset b, a,b \in \mathbb{R}$ را اختیار نموده بتواند.

مثلاً بلندی قد اشخاص، درجه حرارت یک محل، مقدار بارنده گی و غیره.

تابع احتمال متحول تصادفی متمادی:

تابع $f(x)$ بالای ر $\mathbb{R}$ را تابع احتمال متحول تصادفی متمادی X گویند در صورتیکه شرایط ذیل را صدق کند.

1. $f(x) \ge 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$
2. $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx=1$
3. $P(a<X<b)=\int_{a}^{b} f(x)dx$

حالاً با استفاده از معلومات فوق می خواهیم ارتباط احتمالات و احصائیه تحت مطالعه قرار میدهیم.

تابع توزیع احتمال متحول تصادفی میمادی:

تابع توزیع احتمال متحول تصادفی متمادی X با تابع احتمال $f(x)$ عبارت است از

$$F(x) = P(X\le x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt$$

از تعریف فوق میتوان استنباط کرد که:

1. $P)a < X < b = F(b) - F(a) \quad , \quad a,b \in \mathbb{R}$
2. $\frac{dF(x)}{dx}=f(x)$

تعریف: فرضاً X یک متحول تصادفی مجزا با قیمت های ممکنه $x_1 \ , x_2 \ , \ldots \ , x_n$ بوده و احتمال نظیر این قیمت های ممکنه باترتیب $f(x_1)\ , f(x_2), \ldots \ , f(x_n)$ باشد اوسط حسابی متحول تصادفی x که به $E(X)$ نمایش داده میشود، عبارت است از:

$$E(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i f(x_i)$$

هرگاه X یک متحول تصادفی متمادی با تابع احتمال $f(x)$ باشد اوسط حسابی متحول تصادفی X عبارت است از:

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx$$

خواص اوسط حسابی:

هرگاه a ثابت باشد.

1. $E(a) = a$
2. $E(aX+b)=aE(X)+b$
3. $E(X+y)=E(X)+E(y)$
4. $E(X \cdot y)=E(X) \cdot E(y)$

تعریف: فرضاً X یک متحول تصادفی با تابع احتمال $f(x)$ و اوسط حسابی $E(x)$باشد، واریانس X که به $Var(X)$ نمایش داده میشود عبارت است از:

$$Var(X) = E\left(\left(X - E(X)\right)^2\right) = \sum_{i=1}^{n} \left(x_i - E(X)\right)^2 \cdot f\left(x_i\right)$$

$$i = 1, 2, 3, \ldots, n$$

طوریکه X یک متحول تصادفی مجزا باشد، و

$$Var(X) = E\left(\left(X - E(x)\right)^2\right) = \int_{-\infty}^{\infty} \left(x - E(x)^2\right) f(x) dx$$

طوریکه X یک متحول تصادفی متمادی باشد.

ناگفته نماند که جذرالمربع مثبت واریانس را انحراف معیاری نامیده اند.

خواص واریانس:

1. $Var(x) \geq 0$
2. $Var(a) = 0 \qquad \forall a \in \mathbb{R}$

3. $Var(ax) = a^2\ Var(x)\ ,\quad a \in \mathbb{R}$
4. $Var(aX+b) = a^2\ Var(X)\ ,\ a,b \in \mathbb{R}$
5. $Var(X+y) = Var(X) + Var(y)$
1. $Var(x) \geq 0$

توزیع دوحده: هرگاه منظور از انجام یک تجربه وقوع (کامیابی) و یا عدم وقوع (ناکامی) یک حادثه تصادفی مشخص باشد، چنین تجربه را یک تجربه برنولی میانامند. نتیجه هر تجربه برنولی به یکی از دو حالت وقوع حادثه تصادفی مورد نظر (کامیابی) ویاعدم وقوع حادثه مورد نظر (ناکامی) می انجامد.

اگر یک تجربه برنولی را n بار تحت عین شرایط بصورت مستقل، طوریکه در هر تجربه احتمال کامیاب P و احتمال ناکامی $q = (1-P)$ باشد اجزا نمائیم. آنرا توزیع دوحده میانامند و بشکل $b(k,n,P)$ نمایش داده میشود که درآن k تعداد کامیابی ها، n تعداد تکرار تجربه و P احتمال یک کامیابی رانشان میدهد. ازطرف دیگر چون احتمال k کامیابی برای $k = 0,1,2,\ldots,n$ نظیر حدود انکشاف دوحده $(q+P)^n$ است دلیل دیگری به مسمی نمودن آن به توزیع دوحده نیز میباشد یعنی:

$$(q+P)^n = \sum_{k=0}^{n} b(k,n,P)$$

مثلاً چند دفعه انداختن دوسکه از نظر جفت شیر آمدن، چند بار گرفتن یک مهره از یک جعبه که حاوی مهره های سیاه و سفید است از نظر سفید بودن مهره (مهره گرفته شده هربار دوباره به جعبه برگردانیده شود).

قضیه: هر گاه یک ترادف تجارب برنولی متشکل از n تجربه و در هر تجربه احتمال کامیابی P و احتمال ناکامی q باشد پس احتمال فقط k کامیابی دراین n تجربه عبارت است از:

$$P(X=k) = b(k,n,P) = \binom{n}{k} P_q^k n-k$$
$$0 \leq k \leq n \quad , \quad n \in \mathbb{R}$$

خاصیت های توزیع دوحده:

1. $b(k\ ,\ n\ ,\ P) = b(n-k\ ,\ n\ ,\ q)$
2. $b(k\ ,\ n\ ,\ p) = \dfrac{n-k+1}{kq}\ b(k-1\ ,\ n\ ,\ P)$
3. $b(k\ ,\ n\ ,\ P) > b(k-1\ ,\ n\ ,\ P)\ ,\ 0 \leq k < (n+1)P$
4. $b(k\ ,\ n\ ,\ p) < b(k-1\ ,\ n\ ,\ p)\ ,\ (n+1)P < K \leq n$

.5 $b(k\ ,\ n\ ,\ P)$ دارای قیمت اعظمی است در صورتیکه $k = (n+1)P$ باشد.

.6 اوسط حسابی توزیع دوحده مساوی به $(n \cdot P)$ است.

7. واریانس توزیع دوحده عبارت از $(n \cdot P \cdot q)$ میباشد.

توزیع پایسون: این توزیع به افتخار ریاضیدان فرانسوی پایسون $(Poisson)$ مسمی است که از طرف موصوف درسال 1837 با مشخصات ذیل معرفی گردید.

1. یک تخمین حدی توزیع دوحده $b(x\ ,\ n\ ,\ P)$ که درآن احتمال یک کامیابی (P) خیلی کوچک و تعداد دفعات تکرار آزمایش (n) خیلی بزرگ و ضمناً $n \cdot P = \mu$ معین باشد.
2. حوادث تصادفی دریک انتروال مشخص دریک وقفه زمان یا فاصله یا ناحیه به وقوع بپیوندد، چنین حوادث تصادفی میتواند تعداد مخابره های تیلفونی فنی دقیقه در یک سویچ بورد، تعداد تولدات اطفال ذکور در ظرف یک سال دریک شهر معین، تعداد مطالبات اشخاص بیمه در یک وقت معین ازکمپنی وغیره میباشد.

بیشتر احصائیه دانان به این عقیده اند که اگر $P \leq 0,05$ و $n \geq 20$ باشد، استفاده ازاین توزیع نتایج خوبی را بار میاورد، اما حقیقت آن است که به هر اندازه که P خیلی کوچک، n خیلی بزرگ و $n \cdot P = \mu$ معین باشد استفاده ازاین توزیع بهتر به نظر میرسد.

حال فرض میکنیم که $P \to 0 \quad , \quad n \to \infty$ و $nP \to \mu$ ثابت و معین باشد، پس شکل حدی توزیع دوحده $b(X, n, P)$ که بنام توزیع پایسون یاد میشود، عبارت است از:

$$\lim_{\substack{n\to\infty \\ p\to 0}}(X,n,P)=\frac{\mu^X e^{-\mu}}{X!} \qquad X=0,1,2,\ldots$$

توزیع پایسون را بنام قانون اعداد کوچک با توزیع حوادث تصادفی نادر نیز یاد میکنند که در سه حالت علوم مختلف مانند بیولوژی، فزیک، اداره و ریسرچ و غیره وسیعاً قابل استفاده میباشد.

خواص توزیع پایسون:

1. اوسط حسابی توزیع پایسون مساوی است به $E(X) = \mu$.
2. واریانس توزیع پایسون عبارت است از $Var(X) = \mu$.

توزیع نارمل:

توزیع نارمل یکی از مهمترین توزیعات احتمال است که در احصائیه از آن بیشتر استفاده به عمل میاید، گراف آن شکل زنگوله را دارا بوده که بنام منحنی نارمل یاد مبشود، از این منحنی در توضیح و تشریح بسیاری پدیده های که در طبیعت و صنعت بروز میکند، استفاده میشود، علاوه براین در تجارت مترولوژی، مطالعه بارنده گی، اندازه گیری خبط ئر تحقیقات علمی و غیره، این منحنی خیلی مددگار است.

معادله منحنی نارمل در سال 1733 توسط دیموور $(Demoivre)$ عرضه گردید ولی ابداع آن به ریاضیدان جرمنی گاوس $(Gauss)$ تعلق گرفت به همین علت این منحنی را امروز بنام منحنی گاوس میشناسند.

گاوس معادله منحنی نارمل را بصورت مستقل زمانی که مصروف مطالعه خبط حاصله در اندازه گیری مکرر یک مقدار بود کشف نمود.

معادله توزیع احتمال متحول نارمل مربوط به پارامترهای μ و δ میباشد که μ اوسط حسابی و δ انحراف معیاری آنرا نشان میدهد و به شکل $n\left(X,\mu,\delta\right)$ نمایش داده میشود.

تعریف: تابع احتمال متحول تصادفی نارمل X با او سط حسابی μ و واریانس δ^2 عبارت است از:

$$n\left(X,\mu,\delta\right)=\frac{1}{\delta\sqrt{2\pi}}\,e^{\frac{-\left(X-\delta\right)^2}{2\delta^2}}$$

است طوریکه $-\infty<x<\infty$ میباشد.

خواص توزیع نارمل:

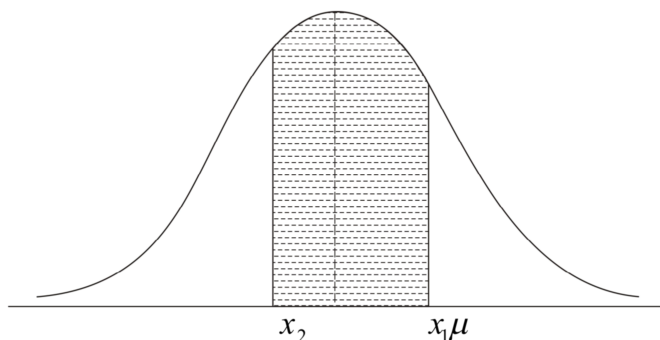
1. مود منحنی نارمل عبارت از نقطه بالای محور X است که به اذأ آن منحنی دارای قیمت اعظمی میگردد، یعنی $\operatorname{mod}e=\mu$.
2. نقاط انعطاف منحنی نارمل عبارت از $\left(\mu\pm\delta\ ,\ n\left(\mu\pm\delta\ ,\ \mu\delta\right)\right)$ میباشد یعنی $x=\mu\pm\delta$.
3. به هراندازه که از اوسط حسابی (μ) به هر دوجهت دور میشویم به همان اندازه منحنی نارمل خورد به محور X ها نزدیکتر میسازد ولی هیچگاه محور X ها را قطع نمی نماید.
4. مساحت تحت منحنی نارمل و بالای محور X ها مساوی به یک واحد میباشد.

مساحات تحت منحنی نارمل:

منظور ار ترسیم گراف منحنی هر توزیع احتمال یا تابع احتمال دریافت مساحت تحت همان منحنی است که بین قیمت های $X=x_1$ و $X=x_2$ محاط گردیده میباشد. مساحت حاصله عبارت از احتمال قیمت های ممکنه تصارفی X میباشد که بین $X=x_1$ و $X=x_2$ قیمت اختیاری نموده میتواند، بنابراین منحنی نارمل

$$P\left(x_1<X<x_2\right)=\int_{x_1}^{x_2}n\left(X,\mu,\delta\right)dx=\frac{1}{\delta\sqrt{2\pi}}\int_{x_1}^{x_2}e\frac{-\left(X-\mu\right)^2}{2\delta^2}dx$$

نمایندگی از مساحت ساحه منحنی نارمل است که بین x_1 و x_2 تحت منحنی محدود گردیده است.



مساحت هر منحنی نارمل بین $X = x_1$ و $X = x_2$ تابع μ و δ آنها نیز میباشد. و باتعویض منحول تصادفی نارمل X به $Z = \dfrac{X-\mu}{\delta}$ ماقادر به تبدیل تمام مشاهدات هر متحول تصارفی نارمل X به یک ست جدید مشاهدات متحول تصادفی نارمل Z با اوسط حسابی $\mu = 0$ و انحراف معیاری $\delta = 1$ میگردیم. پس هر گاه قیمت ممکنه متحول تصادفی نارمل X بین $X = x_1$ و $X = x_2$ واقع گردد با قیمت متحول تصادفی Z بین $Z_1 = \dfrac{x_1-\mu}{\delta}$ و $Z_2 = \dfrac{x_2-\mu}{\delta}$ مطابق مینماید و در نتیجه میتوانیم بنوسیم که:

$$P(x_1 < x < x_2) = \frac{1}{\delta\sqrt{1\pi}} \int_{x_1}^{x_2} e^{\frac{-(X-\mu)^2}{2\delta^2}}\, dx$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{z_1}^{z_2} e^{\frac{-Z^2}{2}}\, dz$$

$$= \int_{z_1}^{z_2} n(z,0,1)\, dz = P(z_1 < z < z_2)$$

تجارب ریاضی

در نبود لابراتوار

تجارب مضمون ریاضی

درس اول

افزودن جوره های اعداد

1. هر یک از بازی کننده یک توته حاوی نمبرها و تعدادی از لوبیا ها را با خود دارند.
2. بازی کننده اول دو "دایس" یا مهره را بالای توته حاوی نمبر ها دور میدهد. و لوبیا ها را برای پوشانیدن اعداد بکار میبرد.

او یک دانه لوبیا را بالای نمبر دور داده شده اش گذاشته میتواند و او دو دانه لوبیا را بالای یک جوره از اعداد گذاشته که با عدد دور داده اضافه خواهد شد.

در صورتیکه به دایس و یا مهره دسترسی ندارید میتوانید از دیگر اجناس نمبر دار استفاده نمایید. در صفحات بعدی نمونه آنرا میتوانید مشاهده نمایید.

مثال: نمبر دور داده شده روی دایس عدد "7" میباشد. در اینصورت بازی کننده میتواند دانه های لوبیا را بجای آن بگذارد. جدول (1 و 2)

9	8	7 (لوبیا)	6	5	4	3	2	1

جدول (1)

9	8	7	6	5 (لوبیا)	4	3	2 (لوبیا)	1

جدول (2)

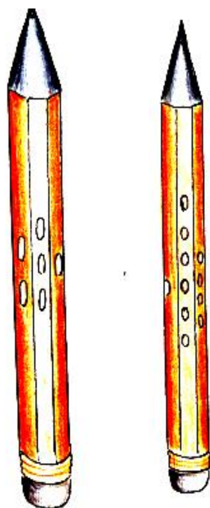
3. هر کدام از بازی کننده ها عین عمل را انجام میدهد.
4. اگر بازی کننده یی نمبریرا دور میدهد و نمیتواند که بازی را نسبت پوشیده بودن محل (جای خالی) از آن خود نماید از بازی خارج میشود.
5. وقتیکه بازی کننده خارج میشود اعداد نا پوشیده شده را در نوار وی جمع نماید.

$$6+2=8$$

9 (لوبیا)	8 (لوبیا)	7 (لوبیا)	6	5 (لوبیا)	4 (لوبیا)	3 (لوبیا)	2	1 (لوبیا)

6. وقتیکه تمام بازی کننده گان خارج شدند اعداد را مقایسه نمایید در اینصورت کمترین نمره برنده است.

به عوض دایس میتوانید از پنسل ها و یا سر پوش بوتل ها کار بگیرید. تصویر (1)





تصویر (1)

تخته بازی

9	8	7	6	5	4	3	2	1

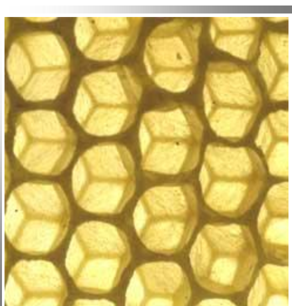
درس دوم

زنبورها و هندسه

مفاهیم اساسی علم ریاضی

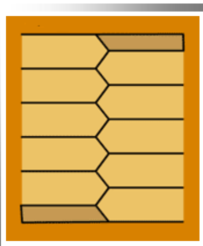
در یک خانه زنبور عسل، تمامی خانه ها یا حجرات آنرا شش ضلعی ها تشکیل می دهد. زنبورها می دانند که این بهترین شکل برای آنها می باشد. چرا آنها شش ضلعی را نسبت به اشکال دیگر برای استفاده ترجیح می دهند؟ در این درس ما از دو شکل برای کشف و بیان موضوع استفاده می نماییم.

مقدمه


تصویر (1)

زنبورها خانه های خود را از موم می سازند. تصویر (1) آنها موم را که تشکیل داده به شکل شش ضلعی در می آورند که با هم وصل می گردند. زنبور ها شیرۀ گل ها را جمع آوری می کنند که بعضی از عصاره ها برای تولید عسل به کار میرود. ولی بعضی از عصاره ها در بدن زنبور ها به موم مبدل می گردد. آنها هزاران بار به طرف گل ها می روند تا به قدر کافی عصاره را برای تولید موم بمکند.

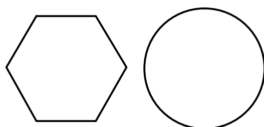
موم از یک نوع غده مومی که در بدن زنبورها می باشد به وجود می آید. زنبور بعداً موم را توسط قسمت های از دهن و پا هایش به شکل شش ضلعی در می آورد. هر شش ضلعی را یک حجره می نامند. با پیوند دادن همه حجرات با هم یک شانه عسل به وجود می آید.


تصویر (2)

شانه عسل یک ساختمان معجزه آسا می باشد. این حجرات در دو طرف آن قرار دارند. حجرات در هر دو طرف به شکل متناوب می باشند طوری که گوشه از شش ضلعی که در این طرف موقعیت دارد دقیقاً مرکز شش ضلعی دیگری می باشد که در عقب آن موقعیت دارد و از همین سبب شانه عسل مستحکم می باشد. این حجرات عمیق و از طرف بالا لبه دار می باشد. از همین لحاظ عسل از آن نمی ریزد. تصویر (2)

از آن جایکه آنها سفر های بی شماری را برای دریافت عصاره و مبدل نمودن آن به موم انجام میدهند، شانه زنبور را بسیار باریک می سازند. اگر آنها از موم کم استفاده نمایند، مجبور به سفر بیش از حد برای اخذ عصاره ها نخواهند بود و پرورش دهنده گان زنبور همین را خوش دارند. این بدین معنی است که زنبورها عصاره بیشتر را برای تولید عسل مصرف می نمایند.

کدام شکل عسل زیادی را در خود نگهمیدارد؟


تصویر (3)

از لوبیا برای اندازه نمودن ظرفیت دو شکل با شعاع های مساوی استفاده نمایید: (دایره و شش ضلعی). تصویر (3) در حقیقت، ما باید حجم را نسبت به مساحت مقایسه نماییم، لیکن نتیجه باید مشابه باشند. با احتیاط دانه های لوبیا را در میان هر شکل قرار دهید و نگذارید تا از محیط آن تجاوز نماید، بخاطریکه عسل در خارج حجره ذخیره شده نمی تواند. دانه های لوبیا را به شکل بسیار نزدیک بدون آنکه بالای یکدیگر قرار دهید محکم بسته بندی نمایید. بعداً دانه های لوبیا را در هر دو شکل حساب نمایید.

شما دریافت خواهد نمود که دایره ها مقدار زیادی از دانه های لوبیا را نسبت به شش ضلعی در خود جاگزین می سازند. اگر دایره ها مقدار زیادی از دانه های لوبیا را در خود جا می دهند پس چرا زنبورها از شش ضلعی استفاده می نمایند؟ شاگردان را اجازه دهید تا جوابات خود را ارائه نمایند.

- شش ضلعی ها به طور محکم با هم می چسپند، ولی دایره ها این خاصیت را ندارند. از همین لحاظ کند و دارای فضای اضافی می باشد.
- از آن جایکه، دایره ها در یک نقطه با هم در تماس اند. تقاطع شش ضلعی ها نسبت به دایره ها قویتر اند. این آسانتر خواهد بود تا شانه عسل را که از دایره ها تشکیل شده باشد شکست. (دایره هایکه با یکدیگر تماس دارند بنام دایره های مماس یاد می گردد).

سؤالات

1. موم زنبور از کجا به وجود می آید؟ (زنبورها باید آنرا بسازند، توسط عصاره گل ها، بعداً همان عصاره ها به موم مبدل می گردد).

2. پرورش دهندگان زنبور کوشش می کنند تا عسل را بدون تخریب شانه های عسل استخراج نمایند. آنها شانه های عسل را برای استفاده دوباره در اختیار زنبور ها قرار می دهند. چرا؟ (اگر زنبور ها دوباره مجبور به دوباره ساختن شانه های عسل نگردند، عصاره زیادی برای تولید عسل بدست خواهد آمد).

3. چرا شش ضلعی ها نسبت به دایره ها برای شانه های عسل شکل بهتری است؟ (زیرا آنها قویتر می باشند و فضاه را به طور مؤثرانه استفاده می نماید).

4. دو طرفه بودن شانه های عسل در قوی ساختن حجرات چطور عمل می نماید؟ (کناره های از شش ضلعی که در این طرف موقعیت دارد دقیقاً مرکز شش ضلعی دیگری می باشد که در عقب آن موقعیت دارد).

5. چرا بسیاری از زنبور ها شانه های عسل شان را در بهار و اوایل ماه های تابستان تشکیل می دهند؟ (این زمانی است که نباتات و درختان میوه دارای شگوفه های زیادی می باشند).

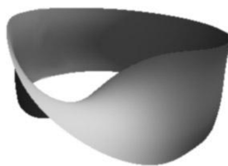
درس سوم

نوار موبیوس

اصطلاح اساسی ریاضی

اهداف آموزشی

شما بهتر میدانید که در تیپ ریکاردر ها معمولاً نوار مقناطیسی را جهت ثبت صوت بکار میبرند. در صورت دقت میتوانید مشاهده نماید که در تیپ ریکاردر ها آنقدر محل وسیع برای چرخ دادن و پیچاندن نوار وجود ندارد. یکی از انجینران کشف نمود که میتواند بدون اینکه طول تیپ و یا جسامت ریکاردر را تغییر دهد بتواند طول ثبت کردن را زیاد نماید.


تصویر (1)

بیائید از خود بپرسیم که چطور این خانم توانست این کار را انجام دهد؟

در یکی از دکانها نجاری ماشینی را برای پالش که در آن نوار سایدن چوب وجود داشت بکار میبرد در حالیکه نوار وی به زودی کهنه میگردید و ایجاب مینمود که باید آنرا تعویض نماید. برای رفع این مشکل شخصی در همان دکان نجاری نظر خوبی را دریافت نمود. وی نوار متفاوت را طرح نمود که میتوانست در همان ماشین بخوبی تطابق نماید. نواری که وی دریافت نمود میتوانست برای مدت طولانی دوام نماید. بیائید از خود بپرسیم که وی چطور آن نوار را به این نوار دلخواه تعویض نمود؟


تصویر (2)

وی دریافت که اگر نوار را "قات" نمائید نوار میتواند برای مدت طویلتری مورد استفاده قرار گیرد. تصویر (1) که این را بنام "نوارپیچی موبیوس" یاد مینماییم. مطابق این پرنسیب نوار عوض داشتن دو روی صرف دارای یک روی میباشد. شما نیز بخوبی میتوانید این تجربه را برایتان انجام دهید.

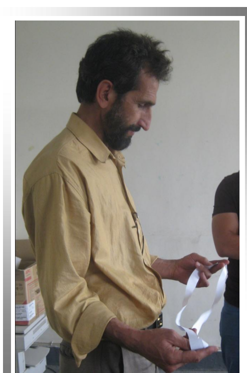
شما میتوانید کاغذ را به دو توته های طولانی مانند نوار طویل قطع نمائید و هر دو انجام آنرا با هم تیپ نموده توسط قلم تان سعی نمائید به دور نوار حلقه شده خط بکشید. در صورت دقت شما ملاحظه خواهید نمود که صرف یک روی نوار کاغذی شما دارای خط بوده ولی روی دیگر آن بدون خط باقی میماند. از اینرو میتوان گفت که این نوار دارای دو روی میباشد.


تصویر (3)

حالا با استفاده از "نوار موبیوس" در وقت قات نمودن نوار آنرا قات نموده بعداً با هم وصل نمائید در اینصورت باز هم قلم تانرا گرفته و خط بکشید در اینصورت شما ملاحظه خواهید نمود که دیگر شما روی نوار را بدون خط ندارید در اینصورت میتوانید که ادعا نمائید که نوار شما صرف دارای یک روی میباشد و بس.

حالا شما میتوانید به وضاحت اظهار دارید که این نوار شما در ماشین صرف دارای یک رو خواهد بود و واضحاً دو چند نسبت به نوار اولی طویلتر کار میدهد.

نوار موبیوس دارای بعضی خصوصیات حیرت آور دیگر نیز میباشد:



تصویر (4)

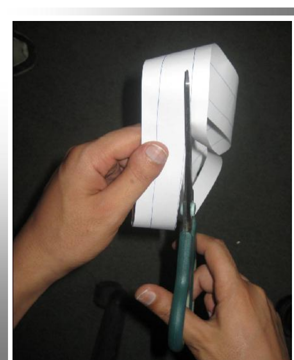
1. نوار را شما با هم وصل نموده اید تا آخر قطع نمائید. تصویر (2) مشاهده نمائید که چی واقع میشود؟ (نوار شما به دو نوار مختلف تبدیل میگردد. شما میتوانید که این را امتحان نمائید و خود تجربه نمائید.
2. خط موبیس را که ترسیم نموده اید الی مرکز قطع نمایید تصویر (3) فکر نمایید که چی واقع خواهد شد؟ ممکن شاگردان اظهار دارند که نوار به دو نوار تبدیل میشود. آنرا بررسی نمایید.
3. نوار قات شده هرگز به دو نوار تبدیل نمیگردد و در واقعیت امر این منحیث یک نوار کار میکند. تصویر (4)

حالا این تجربه را انجام دهید

1. حاله یک موبیس دیگر بسازید و الی طول اخیر دو خط ترسیم نمایید طوریکه موبیس را به سوم حصه تقسیم نماید. تصویر (5)



تصویر (5)



تصویر (6)

2. اظهار دارید که در سورت قطع نمودن مطابق این خطوط چی واقع خواهد شد؟ تصویر (6) اولاً پیشگویی نمایید و بعداً این تجربه را امتحان نمایید.
3. در نتیجه خواهید دید که دو نوار با هم پیوسته بوجود می آید. تصویر (7)

این تجربه و یا پرنسیب بنام ریاضی دان Mobius (موبیوس) یاد گردیده است. باید بخاطر داشت که این تجربه در امور که نوارها و یا تیپ ها مورد استفاده اند بسیار مثمر میباشند، زیرا از این طریق میتوانند یک نوار را بطور دوچند آن مورد استفاده قرار دهند.

خانم ها میتوانند که چادر شانرا مطابق این دست آورد علمی و یا تجربه علمی قات دار بپوشند در اینصورت چادر شان به نحوه خوبی بالای شانه های شان خواهد افتید.

ارزیابی:

از شاگردی تقاضا نمائید که مفیدیت این تجربه را به شاگرد جدید شرح نماید. و خصوصیات آنرا بطور مفصل برای شاگرد جدید توضیح دهد.

دریافت های متزاید

بالای این نوار خطوط را طوری بکشید که بتواند نوار را به چهار حصه، پنج حصه، شش حصه و یا بیشتر از آن تقسیم نماید.

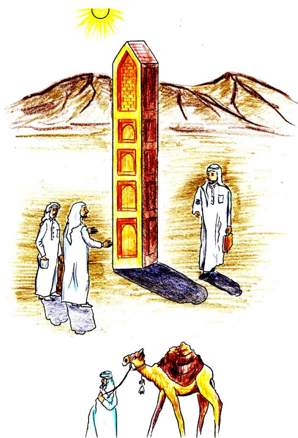
بعداً مطابق همین خطوط نوار را قیچی نمائید و یاداشت نمائید که هر دفعه چی واقع میشود؟ بعد از ملاحظه و دقت میتوانید پیشگویی نمائید، که چطور میتوانید که این نوار را به قسمت های زیادتر تقسیم نمائید.



تصویر (7)

درس چهارم

تالیس و ستونهای در مصر


تصویر (1)

تالیس که 2500 سال قبل زنده گی می کرد، یک تجار و عالم بود. علاقه و کنجکاوی او باعث شد که به جاهای زیاد سفر نماید. یکی از سفر های او به مصر بود، نامبرده بالای اهرام بالا شد و از مقبره فرعون دیدن نمود. روزی او در کنار یک ستون بلند ایستاده شد. تصویر (1)

قبل ازینکه داستان بیشتر توضیح گردد باید گفت که روابط میان مصریها و یونانی ها خوب نبود. یونانی ها دارای قدرت بیشتر بوده و حکومت مصریها را کنترول می نمودند که باعث تنفر مصریها می گردید.

تالیس یک مرد یونانی بود. رهنمای سفر وی که یک مرد مصری بود میخواست با نشان دادن جاهای تاریخی مصر او را حیران نماید. "به این اهرام نگاه کنید!" آنها با بالیدن بخود میگفتند. "اینها را هزار ها سال قبل ازینکه یونانیها نوشتن و خواندن را بدانند اعمار نمودیم." در نزدیکی ستونها گفتند"و به این ستونهای جالب مملکت ما بی بینید. اینها برای معلوم کردن وقت استفاده می شد، ما ساعت را کشف کردیم."

تالیس که خاموش ایستاده بود، به ستون دقیق نگاه می کرد. "ارتفاع این چقدر است؟" او پرسید.

تالیس که طبعیتاً کنجکاو بود میخواست درباره همه چیز بداند، مصریها گیچ خوردند و پذیرفتند که ارتفاع آنرا نمی دانستند.

تالیس در اطراف ستون قدم زد و هر زاویه آنرا به دقت مشاهده نمود.

آن یک روز آفتابی و گرم بود، ولی ستون سایه طویلی را انداخته بود و از روی این سایه ساعت را می دانستند. مصریها ازین عمل او متعجب گردیدند، دیری نگذشت که او گفت، "من ارتفاع ستون را می دانم." او اندازه آنرا به کیوبیت که واحد اندازه گیری در آن وقت بود دریافت نمود. ولی چگونه او ارتفاع آنرا دریافت؟

جواب: تالیس بلندی قد خود را میدانست. هنگامیکه او در اطراف ستون قدم میزد، با استفاده از توان مشاهده او توانست که اندازه بلندی قد خود را دریابد. او نسبت بین سایه و بلندی خود را در ذهنش حساب نمود.

او می دانست که این نسبت مشابه به نسبت بین سایه و بلندی دیگر اشیا می باشد. او با استفاده از سایه ستون توانست بلندی آنرا در ذهنش دریابد.

چگونه سایه اش را بدون کدام وسیله اندازه نمود؟ او شاید با استفاده از قدمهایش آنرا اندازه کرده باشد.

درس پنجم

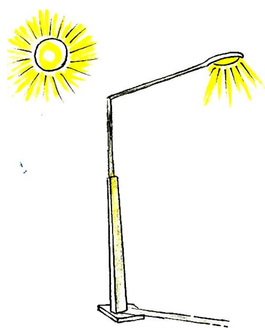
نسبت ها و سایه ها

مفاهیم عمومی ریاضی: استفاده عملی نسبت ها و مثلثهای قایم الزاویه

بعضی اوقات مردم میخواهند تا ارتفاع یک شی را که مستقیماً نمیتوانند اندازه کنند بدانند. طوریکه، شاید بالا شدن به آن شی و استفاده متر ها امکان پذیر نباشد.

بلند ترین درختان دنیا در کلیفورنیا موقعیت دارند. این درختان چوب سرخ به ارتفاع بیشتر از 120 متر بلند میرویند، که بالا شدن به آنها امکان پذیر نیست (اگر چه بعضی اشخاص این توانائی را دارند) و یقیناً برای تعین ارتفاع آنها استفاده از متر ممکن نبوده و هنوز دانشمندان بسیار علاقمند هستند تا ارتفاع مشخص آنها را بدانند.

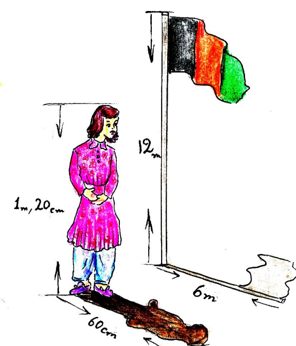
طراحان نقشه میخواهند تا ارتفاع کوه ها را بدانند. یک رنگمال میخواهد بداند تا یک خانه چقدر بلند است، تا بتواند مقدار رنگ مورد ضرورت را برآورد نماید. یک مرد میخواهد که بیرق را در یک پایه آویزان کند، او میخواهد بداند تا برای انجام این عمل ریسمان کافی نزد وی موجود است یا نه.


تصویر (1)

اینها مثالهای ارتفاعات بلند اند که اندازه نمودن آنها به شکل مستقیم ممکن نیست. قابل ذکر است اینکه علم ریاضی طریقه را برای اندازه کردن آنها دریافته است.

قبل از توضیحات بیشتر در مورد این درس، بیان داستان اهرام مصر و تالیس $(Thales)$ برای شاگردان دلچسپ خواهد باشد. (صفحات بعدی را مشاهده کنید).

شما میتوانید از نسبت ها و سایه ها برای دریافت ارتفاع یک شی استفاده نمائید. تصویر (1) در اینجا بعضی از اساساتی وجود دارد که شما باید از آنها استفاده نمائید:

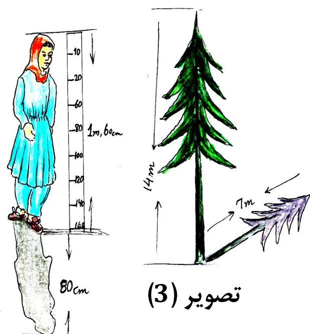


تصویر (2)

1. آفتاب مساویانه بالای تمام آشیأ میتابد و در فاصله بسیار دور از زمین قرار دارد. هر چند شعاع آن به زاویه بسیار خفیف بالای زمین می تابد، ولی ما هنوز فکر میکنیم که شعاع آفتاب بشکل موازی به زمین میرسد.
2. بنابرین سایه یک شی ارتباط مساویانه با سایه یک شی دیگر دارد. تصویر (2)
3. ارتباط سایه ها فقط وقتی مساوی میباشد که سایه ها در یک وقت معین روز اندازه گردند.
4. اندازه سایه ها در طول روز متفاوت میباشند.

به عبارت دیگر:

أ. اگر طول سایه ما دو برابر قد ما باشد، پس سایه های اشیایی دیگر نیز دو چند آنها خواهند بود. باید یاد آور شد که سایه ها در وقت معین روز اندازه گردیده باشند. تصویر (3)



تصویر (3)

ب. اگر طول سایه ما 2/3 برابر به قد ما باشد، طول سایه های اشیایی دیگر نیز 2/3 برابر آنها خواهند بود. باز هم باید گفت که سایه ها در یک وقت معین روز اندازه گردیده باشند.

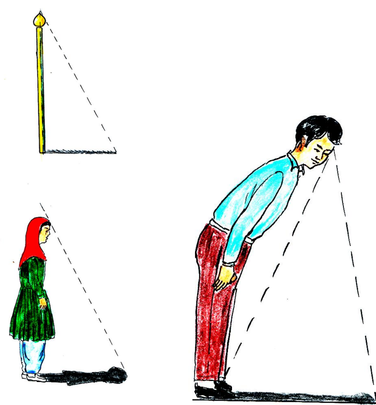
برای شاگردان این معلومات را بیان نموده سپس از شاگردان بخواهید تا در باره آن بی اندیشند که چطور میتوانیم برای تعین ارتفاع یک شی از سایه ها استفاده نمائیم. اگر برای این سؤال جوابی ندارند، با پرسیدن سوالات درباره نسبت ها برای شان معلومات دهید.

پروژه: برای دریافت ارتفاع یک پایه از سایه تان استفاده کنید.

1. بشکل گروپی کار نموده برای اندازه کردن بلندی قد شاگردان از متر ها استفاده نمائید. شاگردانیکه در یک گروپ هستند میتوانند قدهای همدیگر خود را اندازه نمایند. برای معلم ضروری است تا برای شاگردان نشان بدهد که چطور میتوان اندازه دقیق را تعین کرد. یک روش برای دریافت اندازه دقیق اینست که شاگردان در مقابل دیوار بایستند و قسمت بالای سر شانرا نشانی نمایند، سپس فاصله نقطه نشانی شده را از فرش اندازه نمایند. در نتیجه نام ها و بلندی قد شاگردان را در یک کاغذ یاد داشت نمایید.

2. در روشنی آفتاب بیرون رفته برای اندازه گیری طول سایه هر شاگرد بشکل گروپی کار نمایند. برای اینکه اندازه ها درست باشد، شاگردان باید بشکل عمودی ایستاده باشند یعنی بطرف پشت سر یا پیش رو خمیده نباشند. تصویر (4) طول سایه هر شاگرد را در مقابل اندازه قد آنها یادداشت نمائید. تصویر (5)

3. سپس فوراً یک پایه یا یک شی را که بشکل عمودی ایستاده باشد و شما قادر به دیدن سایه آن از سر تا پا باشید اندازه نمایید. هر شاگرد طول سایه را یادداشت خواهد نمود. بهتر این خواهد بود تا تمام شاگردان یک شی را اندازه نمایند.


تصویر (4) تصویر (5)

ارزیابی و جمع بندی

أ. برای هر شاگرد یک چارت را بدهید تا تکمیل نماید. (صفحات بعدی)
شاگردان اندازه قد و طول سایه ها را در قسمت بالای چارت یادداشت نموده و نسبت بین آنها را دریافت نمایند.

ب.برای شاگردان یاد آور شوید، که نسبت بین سایه و طول شی در تمام آشیا یکسان است به شرط اینکه آنها در یک وقت معین روز اندازه گردند. حال بدون اینکه فورمول را به شاگردان نشان بدهید از آنها بخواهید تا ارتفاع پایه را دریافت

کنند. به ایشان اجازه دهید تا از معلوماتی که قبلاً در مورد نسبت ها و سایه ها برای شان داده شده است استفاده نمایند. آنها در صورت کوشش برای دریافت جواب از یک دیگر کمک بگیرند.

فورمول قرار ذیل است: نسبت X طول سایه پایه = ارتفاع پایه

ج. ارزیابی خودی شاگردان: از آنها بخواهید تا به رقم که محاسبه نموده اند نظر باندازند. آیا این رقم کدام مفهومی را افاده میکند؟ آنها با نگاه کردن به ارتفاع پایه میتوانند به شکل تخمینی بگویند که محاسبه شان درست است یا خیر. اگر جواب آنها کوتاه تر و یا طویلتر به نظر میرسد، میتوانند دوباره محاسبه نمایند.

د. زمانیکه اکثر شاگردان محاسبه را به اتمام رساندن، از آنها بپرسید که کدام نسبت ها را بین ارتفاع و سایه آنها دریافته اند. (نسبت ها باید مشابه باشد).

ه. از شاگردان بخواهید تا ارتفاع محاسبه شده پایه را بالای تخته در مقابل صنف بنویسند. نتایج را محاسبه نموده و بیبینید که آنها باید بسیار مشابه باشند.

و. اگر نتایج شاگردان مشابه نباشد، برای از بین بردن اشتباهات کار شانرا را بررسی نمائید.

سؤالات

1. اگر چه شاگردان دارای قدهای مختلف میباشند، پس چرا نسبت بین سایه ها و قدهای آنها مشابه اند؟ (به این دلیل که شعاع آفتاب بالای تمام اشیاء یکسان میتابد، بدین لحاظ نسبت بین طول سایه و طول قد برای تمام اشیاء مشابه است).

2. اگر چه شاگردان دارای قدهای متفاوت اند، اندازه حد اوسط قد آنها مشابه میباشد (تقریبا). چرا؟ (بخاطریکه شاگردان برای محاسبه از نسبت های مشابه استفاده کرده اند).

3. آیا این یک میتود خوب خواهد بود که سایه خود را در یک وقت روز اندازه نموده و برای اندازه نمودن سایه پایه تا اخیر روز انتظار بکشیم؟ (نخیر، به دلیل اینکه در اخیر روز ارتباط بین دو سایهٔ مساوی نمی باشد).

4. آیا شما چی فکر میکنید که چرا انجام دادن این عمل در نصف روز نسبت به صبح وقت و شام آسانتر است؟ (در این وقت روز سایه ها طویلتر بوده و اندازه کردن آنها وقت زیادی را در بر خواهد گرفت و همچنان در این دو وقت روز سایه ها بشکل سریع تغییر میکنند).

5. اگر شما متر نداشته باشید آیا هنوز هم شما این طریقه را انجام داده میتوانید؟ (بلی شما میتوانید از واحد اندازه گیری غیر معیاری استفاده کنید). اگر شما کدام شیوه معیاری اندازه گیری ندارید پس از چی میتوانید استفاده کنید؟ (میتوانید توسط قدم های تان اندازه سایه تان را تعین کنید).

ارزیابی:

برای شاگردان اندازه های تخیلی را بدهید تا اندازه ارتفاع نا معلوم یک شی را محاسبه کنند. معلم باید این محاسبه را قبلاً انجام بدهد تا او بتواند کار شاگردان را بررسی نماید.

اگر شاگردان در خانه متر داشته باشند، آنها را با اندازه قدهایشان که در صنف دریافت نموده بودند به خانه بفرستید و از آنها بخواهید تا اندازه یک شی را در نزدیکی خانه و یا در حویلیشان بیابند. و همچنان به ایشان یاد آور گردید تا سایه خود و آن شی را دوباره اندازه نمایند. چرا؟ (بخاطریکه سایه ها باید متناسب باشند).

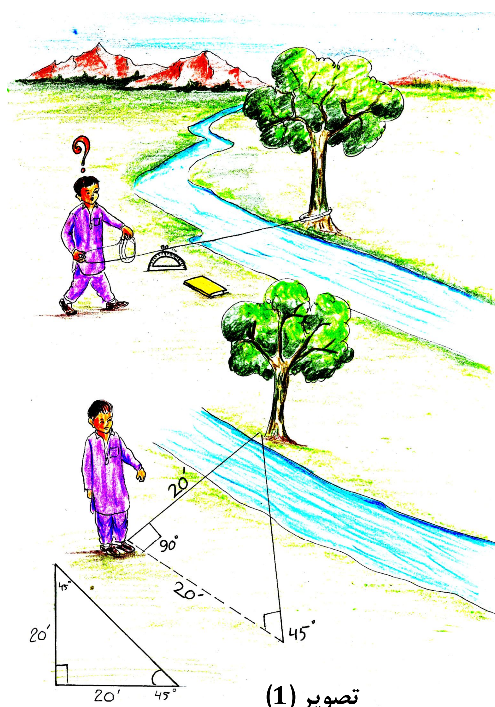
درس ششم

استفاده از زاویه 45 درجه برای دریافت فاصله

مفاهیم عمده هندسی: مثلث های قایم الزاویه با زوایه 45 درجه دارای اضلاع مساوی میباشد. تصویر (1)

معرفی: موارد ذیل را با شاگردان بحث نماید.

شفیقه به دوستش که در کنار دیگر دریا ایستاده بود نگاه می کرد. نمی دانست که ریسمان دست داشته اش به قدر کافی درازست تا به دوستش در کنار دیگر دریا برسد و بتواند از دریا عبور نماید. چطور میتوانست که این فاصله را دریابد؟ او تنها یک زاویه سنج و یک کتابچه داشت.



تصویر (1)

بعد از اندک فکر جای را که ایستاده بود نشانی نمود. او در کنار دریا قدم میزد و با استفاده از زاویه سنج به دوستش نگاه می کرد بعد از یک مدت توقف نمود و جای جدید خود را نشانی نموده به جای اول خود برگشت. او گفت که فاصله دریا را میداند. ولی چگونه؟

شفیقه میدانست مثلث قایم الزاویه که زوایای آن 45 درجه است، دارای دو ضلع مساوی می باشد. این مثلث به این شکل می باشد.

فاصله دریا یک ضلع از آن بود. شفیقه دور خورده و در امتداد دریا تا آنکه زاویه دید به دوستش 45 درجه گردید قدم زد. بعد از آن او فاصله را که طی نموده بود با قدمهایش اندازه نمود، این فاصله با اندازه فاصله عرض دریا مساوی می باشد.

برای اندازه گیری دقیقتر شفیقه چی کرده میتواند؟

او میتواند از متر برای اندازه گیری خود استفاده نماید. او میتواند از وسایل سروی بجای یک زاویه سنج ساده استفاده نماید.

استاد میتواند یک دریای غیر واقعی را که اندازه آن از قبل برایش معلوم باشد در روی صحن مکتب ترسیم نماید.

شاگردان با استفاده از زاویه سنج فاصله آنرا دریابند، آنها باید از فیته، متر و یا خط کش استفاده ننمایند.

شاگردان باید با رهنمای استاد به کار آغاز نماید، بعد ازینکه کار گروپها تمام می گردد نتایج آنها را جمع آوری نموده و در اخیر نتیجه درست را ارایه نماید.

نتایج موفق و نا موفق و مشکلات را که شاگردان در جریان این تمرین داشتند مورد بحث قرار بدهید، نظریات شاگردان را برای بهتر ساختن آن پرسان نماید.

ارزیابی:

شاگردان به شکل گروپی و فعالانه کار نمایند. و همچنان جریان انجام این تمرین را بنوسید.

سؤالات

1. اگر زاویه سنج در نزد شفیقه موجود نمی بود او هنوز هم میتوانیست که این فاصله را با وسایل دست داشته اش دریابد. ولی چگونه؟ (او با استفاده از ورق کتابچه اش که آنرا به شکل چهار ضعلی قاط کرده و زاویه 45 درجه را تشکیل بدهند و با استفاده از این زاویه میتواند دوستش را نشانی نمائید.
2. سروی کننده گان زمین باید همینگونه فاصله ها را دریابند. بجای زاویه سنج از چی استفاده می کنند. (لایزر، تلسکوب های کوچک، و از الایدس)
3. چگونه از روش شفیقه برای اندازه کردن بلندی یک درخت استفاده می نمائید؟

(از کنار درخت به فاصله دور بروید تا قسمت بالا درخت در زاویه سنج تان برابر به 45 درجه گردد، بعد میتوانید اندازه بلندی درخت را دریابید. باید یاد آور شد که فاصله از چشمتان تا به زمین را نیز اضافه نماید. تصویر مقابل را مشاهده نماید.

درس هفتم

نسبت بلندی قد بر اندازه پا


تصویر (1)

مفاهیم عمده ریاضی: اندازه گیری ها نشان می دهند که نسبت ثابت بین اعضای بدن انسانها موجود است.

از شاگردان بخواهید تا یک پای بوت خود را بیرون نموده در یک محل ذخیره نمایند. تصویر (1) بعد یک شاگرد تمام بوتها را در خط مستقیم طوریکه بوت بزرگتر در یک کنار قطار و بوت کوچکتر در کنار دیگر قطار قرار بگیرد تنظیم نماید. تصویر (2) البته باید یاد آور شد که این پروژه را در دهلیز مکتب میتوان به آسانی انجام داد.


تصویر (2)

بعد شاگردان را به اساس قد موازی با قطار بوتها ایستاده نمائید. موقعیت شاگردان باید با اندازه زیاد بر اساس موقعیت بوتها در قطار باشد. تصویر (3) اشخاص قد کوتاه دارای پاهای کوچک و اشخاص قد بلند بر عکس آن می باشد.

نسبت تقریباً ثابت میان بلندی قد و اندازه پاها موجود می باشد. برای توضیح این موضوع به پروژه ذیل دقت نمائید:

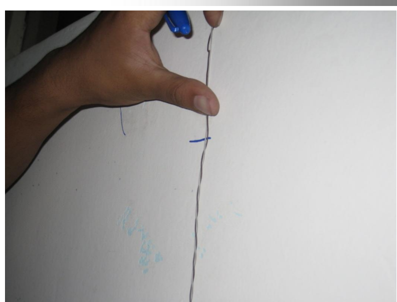

تصویر (3)

1. شاگردان با استفاده از یک ریشمه قدهای خود را اندازه نمایند و ریشمه (تار) را قطع نمائید. تصویر (4 و 5)
2. ریشمه (تار) را در روی زمین به شکل عمودی هموار نمایند، حال اندازه بلندی قد شاگردان در روی زمین واضیح گردیده است.
3. ریشمه (تار) را با قدمهای تان طوری اندازه نمائید که کوری یک پا با انگشت کلان پای دیگر تان چسپیده باشد. تصویر (6)
4. استاد نتیجه هر شاگرد را بالای تخته نوشته نموده از آنها بپرسد که کدام خصوصیت در تعداد قدمها ملاحظه نموده اند یا خیر، نتیجه اندازه گیری باید نزدیک به شش قدم باشد. نسبت بین اندازه پا و بلندی قد بسیاری از اشخاص معمولاً 1/6 میباشد. بلندی قد افراد معمولاً شش برابر اندازه پا های آنها میباشد. اگر تعداد قدمهای شاگردان به 5.5 و 6.5 نرسد باید دوباره اندازه نمایند.


تصویر (4)

این نسبت در اندازه گیری درست محصولات برای کمپنی های لباس کمک مینمائید.

کفش اندازه دوران رستم ذال از سنه 135 قبل از میلاد الی سنه 40 میلادی و توسط این کشف اندازه قد یک شخص از آن زمان معلوم کرده میتوانیم.



تصویر (5)



تصویر (6)